CÉDRIC VILLANI

TEOREMA VIE

Cédric Villani s-a născut în 1973 la Brive-la-Gaillarde, un orăşel din sud-estul Franței, într-o familie de profesori de literatură. Pasionat de matematică din copilărie, studiază la Şcoala Normală Superioară din Paris, specializându-se în analiză matematică. În 1998 îşi susține teza de doctorat „Contribuții la studiul matematic al gazelor şi plasmelor“, care anunță preocuparea sa pentru matematicile aplicate. În 2000 devine profesor la Şcoala Normală Superioară din Lyon, iar în 2009 este numit director al Institutului Henri Poincaré.
Pentru contribuțiile sale în domeniul ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale din fizica statistică, Cédric Villani a primit Premiul Societății Europene de Matematică (2008), Premiul Fermat (2009), Premiul Henri Poincaré (2009), Medalia Fields (2010).

CÉDRIC VILLANI

TEOREMA VIE

Ilustrații de
CLAUDE GONDARD

Traducere din franceză şi cuvânt înainte de
LIVIU ORNEA

HUMANITAS
BUCUREȘTI

Cuvânt înainte

Cartea pe care tocmai ați deschis-o e una stranie. Inclasabilă. Nu e roman, deci nu trebuie citită cu exigențe literare. Nu e autobiografie, așa că strictă autenticitate nu-i cereți. Piesă de teatru de-ar fi, i s-ar spune „docudramă". Dar e scrisă în proză, nu-i piesă de teatru (ceea ce nu înseamnă că n-ar putea fi ușor dramatizată sau transformată în scenariu de film). Atunci ce e?

E o mărturie scrisă sub forma unui jurnal, dar cu evidentă finalitate, scrisă din amintiri, deci nu e chiar un jurnal adevărat. E povestea unui an din viața unui matematician de vârf, anul dinaintea primirii Medaliei Fields (echivalentul, în matematică, al Premiului Nobel). E descrierea căutărilor care au dus, într-un final fericit, dar pe care nimeni nu-l putea bănui de la început, la demonstrarea unei teoreme importante. Recompensa a fost cea mai prestigioasă din matematică.

De ce v-ar interesa povestea asta? Pentru că, dacă veți avea răbdarea s-o parcurgeți până la capăt, veți afla ce înseamnă să faci cercetare de nivel înalt în matematică, veți afla despre aventura uluitoare a facerii unei teoreme, plecând de la primele licăriri ale rezultatului bănuit, de la felul cum, treptat, problema se circumscrie și capătă contururi din ce în ce mai precise, trecând prin momentul în care devine limpede ce e de demonstrat, parcurgând apoi etapa, extrem de anevoioasă, a punerii la punct a tehnicii necesare, a calculelor, până la închegarea demonstrației și la verificarea ei, de către autori, întâi, apoi de către referenții unei reviste de specialitate. E un proces lung – în

cazul acesta, a durat doar un an; pentru demonstrarea Marii Teoreme a lui Fermat, Andrew Wiles a muncit mai mulți ani la rând. Un proces pe parcursul căruia bucuria şi extazul înțelegerii, al pătrunderii în adâncul fenomenelor studiate alternează cu groaza de a nu fi înțeles, cu dezamăgirea produsă de un calcul greşit. Un proces pe parcursul căruia mândria de a fi biruit dificultățile urmează umilinței pe care o simți când realizezi că mintea ta nu poate da atât cât îi ceri. E, în definitiv, aventura minții umane în luptă cu ea însăşi.

Dar nu e vorba numai despre muncă acerbă, consumată în solitudine. E vorba, în povestea asta, şi despre relații umane, despre colaborare între oameni de ştiință, despre relația dintre mentor şi învățăcel – teorema care e personajul principal al cărții e rodul colaborării a doi matematicieni, autorul cărții şi un fost doctorand al său. Şi mai e vorba despre întreg contextul în care lucrează un matematician, despre atmosfera dintr-un mare institut de cercetări, cum e Institutul de Studii Avansate de la Princeton, despre problemele administrative inerente care nu pot fi ocolite, despre congrese, conferințe – un tablou aproape complet al vieții de cercetător.

Din scrupul de autenticitate, autorul a introdus în carte fragmente din mesajele electronice schimbate cu colaboratorul său şi cu alți colegi, a introdus facsimile ale unor pagini din articolele sale. Nu vă speriați dacă, nefiind familiarizați cu matematica, nu veți înțelege nimic din formulele acelea pline de simboluri necunoscute. Nu sunt importante, cartea curge, poate fi citită şi fără ele: sunt doar pete de culoare şi, probabil, singura ocazie să vedeți cum arată nişte pagini dintr-o revistă de matematică.

Să nu vă sperie nici fragmentele în engleză. Tot pentru autenticitate le-a lăsat aşa autorul – dar sunt, toate, traduse la sfârşit.

Povestea aceasta nu putea fi spusă fără ca autorul să se refere la o mulțime de nume de matematicieni şi fizicieni – do-

meniul său predilect e fizica matematică – şi la problemele studiate sau puse de ei. Aşa că, pentru înțelegerea textului, autorul a inclus, la sfârşitul unor capitole, scrise cu caractere cursive, pagini în care explică, foarte pe înțeles, deloc tehnic, aşa cum numai un savant de calibru o poate face, noțiunile de matematică şi fizică trebuincioase, pagini în care povesteşte despre probleme celebre, unele încă nerezolvate. În plus, mai sunt mici medalioane dedicate unor figuri importante de matematicieni şi fizicieni întâlnite în carte, unii contemporani, alții dispăruți de mult.

Şi mai e ceva. Pe lângă povestea în sine, una exemplară pentru matematica de azi, veți descoperi un personaj – autorul însuşi. Cartea aceasta vă va convinge că matematicienii nu sunt tipii aceia ciudați care nu ştiu altceva decât să calculeze şi să mormăie ursuzi. Veți vedea că un matematician are preferințe vestimentare, gastronomice, literare, ascultă muzică (ba chiar „muzici“, de multe feluri, poate veți avea şi curiozitatea să vă confruntați preferințele, ascultând câte ceva pe youtube...), are familie, îşi iubeşte copiii şi se joacă cu ei, le inventează poveşti, iubeşte oamenii şi comunicarea cu ei – e un om cât se poate de viu şi, chiar dacă atipic, un om normal.

Din câte ştiu, nu mai există o carte asemenea, cel puțin nu despre matematică. Poate va deschide un drum. E scrisă de un mare matematician care se pune pe sine în scenă, dar se priveşte şi din afară, reflectând la meseria şi la pasiunea sa, la locul şi rolul matematicii în societate. Dacă nu de la vârfurile ei, atunci de la cine să aflăm ceva despre ştiință?

Liviu Ornea

Lumea mă întreabă adesea cum e viața unui cercetător, a unui matematician, cum e viața noastră de zi cu zi, cum ne scriem opera. Aceasta e întrebarea căreia încearcă să-i răspundă cartea de față.

Povestirea urmărește apariția unui pas înainte în matematică, din momentul în care cineva s-a hotărât să se lanseze în această aventură, până când articolul care anunță noul rezultat – noua *teoremă* – e acceptat pentru publicare într-o revistă internațională.

Între aceste două momente, căutările cercetătorilor, departe de a urma o traiectorie rectilinie, se înscriu pe un drum lung, plin de meandre, de înaintări și de reveniri – așa cum se întâmplă adesea în viață.

Cu excepția câtorva modificări nesemnificative cerute de nevoile prezentării, totul în această povestire e conform cu realitatea, cel puțin așa cum am perceput-o eu.

Câteva pasaje mai lungi în engleză sunt traduse la sfârșitul cărții.

Îi mulțumesc lui Olivier Nora pentru că a iscat acest proiect cu ocazia unei întâlniri neprevăzute; îi mulțumesc lui Claire pentru atentele lecturi succesive și pentru sugestii; îi mulțumesc lui Claude pentru frumoasele sale ilustrații; îi mulțumesc lui Ariane Fasquelle și echipei de la Grasset pentru receptivitate și pentru calitatea muncii lor editoriale; în fine,

îi mulțumesc lui Clément pentru colaborarea de neuitat, fără de care această carte n-ar fi avut obiect.

Cititorii şi cititoarele sunt bine-veniți să-mi comunice întrebările şi comentariile lor pe cale electronică.

Cédric Villani,
Paris, decembrie 2011

Capitolul 1

Lyon, 23 martie 2008

Duminică, ora 13; laboratorul ar fi pustiu fără cei doi matematicieni puşi pe treabă. O întâlnire privată pentru o şedinţă de lucru calmă, în biroul pe care îl ocup de opt ani la etajul al treilea al Şcolii Normale Superioare din Lyon.

Aşezat într-un fotoliu confortabil, bat darabana pe biroul mare, cu degetele desfăşurate ca picioarele unui păianjen, aşa cum m-a antrenat pe vremuri profesorul meu de pian.

În stânga mea, pe masa de-alături, un calculator. La dreapta, un dulap cu câteva sute de cărţi despre matematică şi fizică. În spatele meu, aranjate cu grijă pe rafturi lungi, mii şi mii de pagini de articole fotocopiate într-o epocă ancestrală în care revistele ştiinţifice nu erau încă electronice; de asemenea, reproduceri ale multor lucrări de cercetare, fotocopiate într-o perioadă în care salariul nu-mi permitea să-mi astâmpăr foamea de cărţi. Mai e şi un întreg metru liniar de ciorne, arhivate metodic de-a lungul anilor; şi încă pe-atât – notiţe scrise de mână, martorele nenumăratelor ore petrecute ascultând expuneri ştiinţifice. Pe birou, în faţa mea, Gaspard, laptopul meu, botezat în onoarea lui Gaspard Monge, marele matematician revoluţionar; şi un teanc de foi acoperite cu simboluri matematice, mâzgălite în cele patru colţuri ale lumii şi adunate special pentru discuţia de azi.

Clément Mouhot, complicele meu, ochi sclipitori, stă cu markerul în mână lângă tabla albă enormă care ocupă întreg peretele din faţa mea.

— Hai, spune, de ce m-ai chemat, ce-ai de gând? N-ai prea dat detalii în mailul tău…

— Mă las din nou pe mâna vechiului meu demon, e clar că e prea ambițios, e vorba despre regularitatea pentru Boltzmann neomogenă.

— Regularitate condițională? Adică modulo margini de regularitate minimale?

— Nu, fără condiții.

— Nici mai mult, nici mai puțin! Nu în cadru perturbativ? Crezi că suntem pregătiți?

— Da, m-am apucat din nou, am avansat destul de bine, am idei, dar m-am blocat. Am descompus dificultatea cu mai multe modele reduse, dar îmi scapă chiar şi cel mai simplu. Credeam că am un argument cu principiul de maxim, dar nu, s-a prăbuşit totul. Trebuie să-ți povestesc.

— Dă-i drumul, ascult.

Vorbesc mult: despre rezultatul pe care-l am în minte, despre încercările pe care le-am făcut, despre diferitele bucăți pe care nu reuşesc să le pun cap la cap, despre puzzle-ul logic care nu se lasă compus, despre ecuația lui Boltzmann care nu cedează.

Ecuația lui Boltzmann, cea mai frumoasă ecuație din lume, după cum i-am spus unui ziarist! M-a prins când eram mic, adică în timpul tezei, şi-am studiat-o pe toate părțile. Găseşti orice în ecuația lui Boltzmann: fizică statistică, săgeata timpului, mecanica fluidelor, teoria probabilităților, teoria informației, analiza Fourier… Unii spun că nimeni nu cunoaşte mai bine ca mine lumea matematică generată de ecuația asta.

Pe Clément l-am inițiat în universul acesta misterios acum şapte ani, când şi-a început teza sub îndrumarea mea. Clément a învățat cu lăcomie şi e, cu siguranță, singurul care a citit toate lucrările mele despre ecuația lui Boltzmann; acum e un cercetător respectat, autonom, strălucit şi entuziast.

Cu şapte ani în urmă îl ajutam să urce-n şa, acum am eu nevoie de el. Am căzut pe o problemă prea grea, singur n-o

dovedesc; trebuie măcar să-mi pot povesti strădaniile cuiva care are teoria la degetul mic.

— Să presupunem că apar şi ciocniri razante, un model fără cut-off. Atunci ecuaţia se comportă ca o difuzie fracţionară, degenerată, desigur, totuşi o difuzie, şi de îndată ce avem margini pentru densitate şi temperatură, ne putem lansa într-o schemă iterativă de tip Moser, adaptată ca să ţină seama de caracterul nelocal.

— Schemă Moser? Hmmm… Stai, încep să notez.

— De o schemă tip Moser. Cheia e că operatorul lui Boltzmann… e drept că operatorul ăsta e biliniar, e nelocal, totuşi, una peste alta, e sub formă de divergenţă, ceea ce face să meargă schema lui Moser. Faci o schimbare de funcţie neliniară, creşti puterea… De fapt, ai nevoie de ceva mai mult decât de temperatură, trebuie să controlezi matricea momentelor de ordinul 2. Dar, oricum, esenţială e pozitivitatea.

— Stai, stai, ia-mă-ncet, de ce nu-i de-ajuns temperatura?

Explic pe-ndelete. Discutăm, ne contrazicem. Tabla dă pe-afară de simboluri matematice, Clément vrea să ştie mai mult despre pozitivitate. Cum să arătăm pozitivitatea strictă fără margini de regularitate? Se poate?

— Nu-i aşa de şocant, dacă stai să te gândeşti, ciocnirile produc margini inferioare, la fel transportul într-un domeniu învecinat, lucrurile se leagă; cele două efecte ar trebui să se potenţeze reciproc, altfel se cheamă că avem ghinion. A încercat pe vremuri Berndt, dar s-a lăsat. Bun, sunt o groază care au încercat, fără succes, dar tot e plauzibil.

— Eşti sigur că transportul va duce la pozitivitate fără regularitate? Totuşi, fără ciocniri, transporţi valoarea densităţii, n-are cum să devină mai pozitivă…

— Da, dar când mediezi după viteze întăreşti pozitivitatea… cam ca în lemele de medii cinematice, dar acolo n-ai regularitate, e pozitivitate. E drept că nimeni nu s-a prea uitat la asta aşa. Asta-mi aduce aminte… uite, acum doi ani, la Princeton,

un postdoc chinez mi-a pus o întrebare cam de felul ăsta. Iei o ecuație de transport, să zicem că în tor, presupui regularitate zero, vrei să arăți că densitatea spațială devine strict pozitivă. Fără regularitate! Ştia s-o facă pentru transportul liber, sau pentru ceva mai general în timp scurt, dar la timp mai lung se bloca… Am transmis şi altora întrebarea lui, dar n-am primit nici un răspuns convingător.

— Stai, stai, zi-mi întâi cum faci cu nemernicul de transport liber.

Transportul liber e termenul care, în jargonul nostru, desemnează un gaz ideal în care particulele nu interacționează. Un model atât de simplificat, încât nu e deloc realist, dar se pot învăța foarte multe din el.

— Păi, cu soluția explicită ar trebui să meargă, stai un pic, să-ncercăm s-o refacem.

Ne apucăm de treabă, separat, încercăm să refacem raționamentul pe care trebuie să-l fi făcut Dong Li. Nu e un rezultat major, mai degrabă e un mic exercițiu. Dar poate că pricepând soluția acestui mic exercițiu o să ne înscriem pe drumul cel bun pentru rezolvarea marii enigme. Şi-apoi, e ca un joc! După câteva minute de scris în tăcere, câştig.

— Cred c-am făcut-o.

Trec la tablă să-mi expun soluția, ca la seminar.

— Descompunem soluția conform cópiilor torului… schimbăm variabila în fiecare bucată… iese-n față un iacobian, foloseşti regularitatea Lipschitz… până la urmă găseşti o convergență în $1/t$ („unu pe t“). E încet, dar sună bine.

— Aha, deci n-ai regularizare… obții convergența cu media… media

Clément raționează cu voce tare la calculele mele. Dintr-odată are o revelație, e excitat şi arată cu degetul spre tablă:

— Păi, atunci ar trebui să vedem dacă asta nu se poate folosi pentru efectul de damping Landau!

M-a dat gata. Trei secunde de linişte. Sentimentul vag că e ceva important.

Cer explicații, Clément e tulburat, agitat, îmi spune că demonstrația asta îi amintește o discuție avută cu trei ani în urmă cu un alt cercetător de origine chineză, Yan Guo, la Universitatea Brown, pe Coasta de Est a Statelor Unite.

— În amortizarea Landau, căutăm o relaxare pentru o ecuație reversibilă…

— Da, da, știu, dar nu intervine și interacția? Nu e un Vlasov, aici e doar transport liber!

— Poate că interacția are rolul ei, da, dar… ar trebui să fie exponențială, convergența. Crezi că $1/t$ e optimal?

— Sună bine, nu-i așa?

— Și dacă regularitatea ar fi mai puternică? N-ar fi mai bine?

— Hmmmm.

Mormăi. Amestec de neîncredere și de concentrare, de interes și de frustrare.

După câteva clipe de tăcere, priviri fixe și buze strânse, reluăm discuția… Oricât de pasionantă ar fi mitica (și mistica?) amortizare Landau, ea n-are nimic de-a face cu proiectul nostru de cercetare inițial; după câteva minute, trecem la altceva. Discuția mai continuă mult, trecem de la o noțiune matematică la alta. Luăm notițe, argumentăm, ne indignăm, învățăm, pregătim un plan de atac. Totuși, când ne despărțim, amortizarea Landau e pe lunga noastră listă de teme pentru acasă.

*

Ecuația lui Boltzmann,

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\cdot\nabla_x f=\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{S}^2}|v-v_*|\Big[f(v')f(v'_*)-f(v)\,f(v_*)\Big]\,dv_*d\sigma,$$

descoperită pe la 1870, modelează evoluția unui gaz rarefiat, format din miliarde și miliarde de particule care se izbesc una de alta; reprezentăm distribuția statistică a pozițiilor și

vitezelor acestor particule printr-o funcție f(t,x,v) care la timpul t indică densitatea de particule a căror poziție e (aproximativ) x şi a căror viteză e (aproximativ) v.

Ludwig Boltzmann a descoperit noțiunea statistică de entropie, sau dezordine, a unui gaz:

$$S = -\iint f \,\log f \, dx\, dv;$$

folosindu-şi ecuația, a demonstrat că, pornind dintr-o stare inițială oarecare, entropia nu poate decât să crească în timp, niciodată să scadă. În termeni metaforici, lăsat în voia lui, gazul devine, în mod spontan, din ce în ce mai dezordonat, iar evoluția aceasta e ireversibilă.

Cu creşterea entropiei, Boltzmann regăsea o lege descoperită experimental câteva zeci de ani mai devreme şi cunoscută sub numele de al doilea principiu al termodinamicii*; dar îi adăuga câteva contribuții conceptuale excepționale. În primul rând, înlocuia o lege empirică, observată experimental şi ridicată la rang de principiu, cu o demonstrație argumentată; apoi, introducea o interpretare matematică, extraordinar de fecundă, a misterioasei entropii; în fine, reconcilia fizica microscopică – imprevizibilă, haotică şi reversibilă – cu o fizică macroscopică previzibilă, stabilă şi ireversibilă. Contribuțiile acestea i-au adus lui Boltzmann un loc de cinste în panteonul fizicii teoretice, precum şi atenția mereu reînnoită a filozofilor şi epistemologilor.*

Apoi, Boltzmann a definit starea de echilibru a unui sistem statistic ca starea de entropie maximă, fondând astfel imensul domeniu al fizicii statistice a echilibrului: cea mai naturală e starea de dezordine.

Tânărul cuceritor Boltzmann a făcut treptat loc unui bătrân măcinat care s-a sinucis în 1906. Tratatul său de teoria gazului, încă de actualitate, ne apare, din perspectiva trecerii anilor, ca una dintre cele mai importante lucrări ştiinţifice ale secolului al XIX-lea. Dar predicţiile sale, confirmate de experienţe, aşteaptă încă o teorie matematică completă; una dintre piesele lipsă în acest puzzle este studiul regularităţii soluţiilor ecuaţiei lui Boltzmann. În ciuda acestui mister care nu se lasă devoalat, sau poate că, în parte, datorită lui, ecuaţia lui Boltzmann e acum obiectul unei teorii înfloritoare care preocupă o comunitate internaţională de matematicieni, fizicieni şi ingineri care se adună cu sutele la colocviile Rarefied Gas Dynamics *şi cu multe alte ocazii.*



Ludwig Boltzmann

Capitolul 2

Lyon, ultima săptămână din martie 2008

Amortizarea Landau!

După întâlnirea noastră de lucru, în minte îmi revin amintiri neclare: frânturi de conversație, discuții neduse până la capăt… Toți fizicienii specialişti în plasmă sunt familiarizați cu amortizarea Landau, dar pentru matematicieni fenomenul rămâne un mister.

În decembrie 2006, eram la Oberwolfach, într-un institut legendar pierdut în inima munților Pădurea Neagră, un loc liniştit în care matematicienii vin şi pleacă într-un balet necurmat pentru a discuta cele mai diverse subiecte. Uşi fără încuietoare, acces liber la băuturi, mici cutii de lemn în care se lasă banii datorați, prăjituri din belşug, mese la care convivii se aşază pe locuri stabilite prin tragere la sorți.

În ziua aceea, la Oberwolfach, soarta mă plasase la aceeaşi masă cu Robert Glassey şi cu Eric Carlen, doi specialişti americani în teoria matematică a gazului. În ajun, prezentasem plin de mândrie, în deschiderea colocviului, o recoltă proaspătă de rezultate; şi, în aceeaşi dimineață, Eric ne servise un expozeu entuziast şi mustind de idei despre care continuam să discutăm în jurul supei aburinde. Toate astea, fără nici o pauză, erau un pic prea mult pentru Robert, care se simțea bătrân şi depăşit, şi suspina: „Time to retire"…

Eric protestase: cum să ieşi la pensie când n-a fost niciodată o perioadă mai captivantă pentru teoria gazului! Protestasem şi eu: cum să ieşi la pensie când avem atâta nevoie de

experiența acumulată de Robert în treizeci şi cinci de ani de carieră!

— Robert, tell me about the mysterious Landau damping effect, can you explain, is it for real?*

*Weird, strange***, astea-s cuvintele care s-au repetat în răspunsul lui Robert. Da, Maslov lucrase la asta; da, există paradoxul reversibilității care pare incompatibil cu amortizarea Landau; nu, nu e limpede. Eric sugerase că amortizarea asta ar fi o himeră ieşită din imaginația fertilă a fizicienilor, fără speranța unei formulări matematice. Nu obținusem nici un fel de informație din conversația asta, şi o arhivasem într-un ungher al creierului.

Acum suntem în 2008 şi nu ştiu despre subiect mai mult decât în 2006. Dar Clément a avut ocazia să-l discute îndelung cu Yan Guo, „fratele" ştiințific mai mic al lui Robert – au avut acelaşi îndrumător de teză. Fondul problemei, spunea Yan, e că Landau n-a lucrat pe modelul original, ci pe unul simplificat, *liniarizat*. Nimeni nu ştie dacă lucrările lui se



Yan Guo

---

* Robert, vorbeşte-mi despre misteriosul efect de amortizare Landau, poți să-l explici, chiar există? (în engl. în text). (*N. t.*)

** Ciudat, straniu (în engl. în text). (*N. t.*)

aplică şi „adevăratului“ model neliniar. Yan e fascinat de problemă – şi nu-i singurul.

Oare Clément şi cu mine am putea-o ataca? De ce nu? Dar, ca să rezolvăm problema, trebuie întâi să ştim exact care-i întrebarea! În cercetarea matematică, identificarea cu claritate a obiectivului e un prim pas crucial şi delicat.

Şi oricare-ar fi acest obiectiv, singurul lucru de care suntem siguri e punctul de pornire: ecuația lui Vlasov:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \left(\nabla W * \int f \, dv \right) \cdot \nabla_v f = 0,$$

care determină, cu o excelentă precizie, proprietățile statistice ale plasmei. Matematicianul, aidoma sărmanei doamne de Shalott dintr-o baladă arthuriană, nu poate privi lumea direct, ci numai prin intermediul imaginii sale reflectate, în speță, matematica. Aşa că trebuie să-l târâm pe Landau în lumea ideilor matematice, lume guvernată numai de logică.

Nici Clément, nici eu nu mai lucraserăm pe ecuația asta. Dar ecuațiile aparțin tuturor, aşa că aveam să ne suflecăm mânecile.

*

Lev Davidovici Landau, evreu rus născut în 1908, Premiul Nobel în 1962, e unul dintre cei mai mari fizicieni ai secolului XX. Persecutat de regimul sovietic, eliberat din închisoare grație devotamentului colegilor săi, a fost şi un tiran al fizicii teoretice din epoca sa, şi autorul, alături de Evgheni Lifşiț, al unui curs magistral care e încă de neocolit. Contribuțiile sale fundamentale sunt prezente în toate lucrările de fizica plasmei: mai întâi, ecuația lui Landau, sora mai mică a ecuației lui Boltzmann, pe care o studiasem ani de-a rândul în timpul tezei; apoi, celebra amortizare Landau, care sugerează o stabilizare spontană a plasmei, o întoarcere către echilibru, fără creşterea entropiei, fenomen opus mecanismelor care guvernează ecuația lui Boltzmann.

Fizica gazelor, fizica lui Boltzmann: entropia creşte, informația se pierde, săgeata timpului lucrează, starea inițială se uită; treptat, distribuția statistică se apropie de starea de entropie maximă, atât de dezordonată pe cât se poate.

Fizica plasmei, fizica lui Vlasov: entropia e constantă, informația se conservă, nu există săgeata timpului, starea inițială e mereu reținută; dezordinea nu creşte şi nu există nici un motiv să te apropii de ceva anume.

Dar Landau reluase studiul lui Vlasov – acelaşi Vlasov pe care-l disprețuia şi despre care nu ezita să afirme că aproape toate contribuțiile lui sunt false – şi sugerase că forțele electrice se atenuează spontan în timp, fără să crească entropia şi fără frecare de o natură sau alta. O erezie?

Calculul matematic al lui Landau, complex şi ingenios, a convins comunitatea ştiințifică, iar acest fenomen a primit numele de amortizare Landau. Nu fără ca voci neîncrezătoare să se facă, desigur, auzite.



Lev Landau

Capitolul 3

Lyon, 2 aprilie 2008

Masa joasă instalată pe culoar e acoperită cu ciorne, iar tabla e plină de desene micuțe. Pe fereastra uriaşă se vede un soi de păianjen gigant, negru, cubist, cu picioroange prea lungi, faimosul laborator lyonez P4, unde se fac experiențe cu viruşii cei mai periculoşi din lume.

Invitatul meu, Freddy Bouchet, îşi aranjează notele şi le îndeasă în rucsac. Am stat de vorbă o oră-ntreagă despre cercetările lui, despre simulările numerice pe galaxii şi despre misterioasa capacitate a stelelor de a se organiza spontan în configurații stabile.



Freddy Bouchet

Această stabilizare nu e înscrisă în legea gravitației universale descoperită de Newton acum 343 de ani. Totuşi, când observăm o aglomerare de stele guvernate de această lege a

gravitației, avem în mod clar impresia că ansamblul se stabilizează după un timp suficient de mare. Se vede bine în numeroase calcule făcute pe calculatoare puternice…

Aşadar, se poate *deduce* această proprietate de stabilizare din legea gravitației universale?

Astrofizicianul Linden-Bell, care credea în ea cu tărie de fier, a botezat fenomenul *relaxare violentă.* Un oximoron de toată frumusețea!

— Relaxarea violentă, Cédric, e ca amortizarea Landau. Doar că amortizarea Landau e în regim perturbativ, iar relaxarea violentă în regim puternic neliniar.

Freddy, care are dublă formație, de matematician şi de fizician, şi-a consacrat o parte din viață unor probleme de felul acesta. Printre chestiunile fundamentale pe care le-a studiat, despre una anume a vrut să vorbim azi mai pe-ndelete.

— Vezi, tu, Cédric, când modelăm galaxiile, e clar că înlocuim stelele, punctişoare din univers, cu un fluid, ca un gaz de stele. Trecem de la discret la continuu. Dar care e mărimea erorii comise prin această aproximare? Cum depinde ea de numărul de stele? Într-un gaz, avem un miliard de miliarde de particule, într-o galaxie doar o sută de miliarde. Oare asta schimbă mult lucrurile?

Interlocutorul meu a discutat multă vreme, a pus întrebări, a explicat rezultate, a schițat desene, a notat referințe. A fost evocată legătura dintre cercetările lui şi unul dintre caii mei de bătaie, teoria transportului optimal, fondată de Monge. Schimbul de idei a fost profitabil, şi Freddy e satisfăcut. Cât despre mine, sunt teribil de excitat pentru că am văzut apărând din nou amortizarea Landau, la doar câteva zile după discuția mea cu Clément.

În timp ce Freddy îşi ia rămas-bun şi pleacă, intervine vecinul meu de birou, care şi-a văzut până acum de lucru în linişte, clasându-şi hârtiile. Părul lui lung, grizonant, îi dă un simpatic aer contestatar.

— Ştii, Cédric, m-am abţinut să mă amestec, dar ştiam desenele alea de pe tablă.

Plenary speaker la ultimul Congres Internaţional al Matematicienilor, membru al Academiei de Ştiinţe, prezentat adesea – şi pe drept cuvânt, nu încape îndoială – drept „cel mai bun conferenţiar din lume“ în matematică, Étienne Ghys este el însuşi o instituţie. Provincial militant, de douăzeci de ani s-a dedicat dezvoltării laboratorului de matematică de la Şcoala Normală Superioară din Lyon, care, mai ales datorită contribuţiei sale, s-a transformat într-unul dintre cele mai bune centre de geometrie din lume. Pe cât de carismatic, pe atât de cârcotaş, Étienne are întotdeauna ceva de spus, despre orice subiect.



Étienne Ghys

— Desenele pe care le-am făcut cu Freddy le ştii?

— Da, ăsta apare în teoria K.A.M. Iar pe celălalt l-am mai văzut…

— Ai o sursă bună?

— Păi, ştii, K.A.M. intervine aproape peste tot: pleci cu un sistem dinamic complet integrabil, cvasiperiodic, perturbi un pic, apare o problemă de divizori mici care distruge unele traiectorii pe termen lung, dar rămâi cu stabilitatea în probabilitate.

— Da, da, ştiu, dar desenele?

— Stai, o să-ţi găsesc o carte bună despre asta. Dar sunt o mulţime de desene pe care le găseşti în cărţi de cosmologie şi cu care suntem obişnuiţi din teoria sistemelor dinamice.

Foarte interesant. Am să mă documentez. O să m-ajute oare să pricep ce se ascunde în spatele stabilizării?

Asta-mi place cel mai mult în laboratorul meu, atât de mic şi atât de performant, felul în care se amestecă subiectele în conversaţie, între cercetători cu orizonturi matematice diferite, în jurul unei cafetiere sau pe culoare, fără să le pese de barierele tematice. Atâtea piste noi de explorat!

N-am răbdare să aştept ca Étienne să găsească pentru mine o carte în uriaşa lui colecţie, aşa că mă descurc cu ce am în biblioteca mea: un tratat al lui Alinhac şi Gérard despre metoda Nash-Moser. Am mai frunzărit cartea asta acum câţiva ani şi ştiu că metoda Nash-Moser e unul dintre pilonii teoriei Kolmogorov-Arnold-Moser, numită K.A.M., despre care vorbea Étienne. Mai ştiu şi că în spatele lui Nash-Moser stă extraordinara schemă de aproximare a lui Newton, schema aceea care converge cu o viteză inimaginabilă, în exponenţiala exponenţialei, şi pe care Kolmogorov a reuşit s-o folosească atât de ingenios!

Sincer să fiu, nu văd nici o legătură între toate lucrurile astea frumoase şi problema mea de amortizare Landau. Dar dacă e bună intuiţia lui Étienne? Pauză de visare, îndes cartea în rucsacul deja greu şi alerg să-mi aştept copiii la ieşirea din şcoală.

Cum ajung în metrou, scot din haină o Manga* şi, preţ de o clipă scurtă şi preţioasă, lumea exterioară dispare ca să lase loc unui univers populat de chirurgi supranatural de îndemânatici, cu feţe peticite, de yakuzi neîndurători care-şi dau viaţa pentru fetiţele lor cu ochi mari de căprioară, de monştri cruzi care se preschimbă dintr-odată în eroi tragici, de băieţei cu bucle blonde care se transformă treptat în monştri plini de cruzime. O lume sceptică şi tandră, pasională şi dezabuzată, lipsită de prejudecăţi şi de maniheisme, care musteşte de emoţie,

---

* Revistă de benzi desenate în stil japonez. (*N. t.*)

te loveşte-n plex şi stoarce lacrimile cititorului gata să joace jocul inocenţei.

Staţia Hôtel de Ville, trebuie să cobor. Pe durata călătoriei, prin minte şi prin vine mi-a curs povestea, ca un mic şuvoi de hârtie şi de cerneală, m-am curăţat pe dinăuntru.

Astfel, toate gândurile matematice sunt puse în *stand by*. Manga şi matematica nu se-amestecă. Poate mai târziu, în vis? Şi dacă Landau, după groaznicul accident care l-ar fi putut costa viaţa, ar fi fost operat de Black Jack? E clar că acel chirurg demonic l-ar fi readus imediat la viaţă, iar Landau şi-ar fi putut relua opera supraomenească.

Ca să vezi, nu m-am mai gândit la observaţia lui Étienne şi la chestia aia cu teoria Kolmogorov-Arnold-Moser! Kolmogorov şi Landau… care-i legătura? Îndată ce păşesc afară din metrou, misterul începe iar să-mi bântuie mintea. Dacă e vreo legătură, am s-o găsesc.

De fapt, la vremea aceea n-aveam cum să ghicesc că-mi va lua mai bine de un an până să găsesc legătura. Nici n-aveam cum să pricep ironia incredibilă: desenul care l-a făcut pe Étienne să reacţioneze, care l-a făcut să se gândească la Kolmogorov, ilustra de fapt o situaţie în care legătura cu Kolmogorov e ruptă.

În ziua aceea, Étienne a avut o intuiţie bună, al cărei punct de pornire era greşit. Ca şi cum Darwin ar fi ghicit evoluţia speciilor comparând liliecii cu pterodactilii şi având convingerea – greşită – că există o legătură strânsă între ei.

Zece zile după cursul neaşteptat luat de şedinţa mea de lucru cu Clément, asta-i a doua coincidenţă miraculoasă care-mi iese în cale.

Dar trebuie s-o exploatez.

*

„Cum îl chema pe fizicianul ăla rus? Îl adunaseră de pe jos după un accident de maşină de toată frumuseţea. Din

punct de vedere medical era mort. Am citit despre cazul ăsta extraordinar. Ştiinţa sovietică şi-a mobilizat toate resursele ca să salveze un cercetător de neînlocuit. Au chemat şi medici străini. Au reanimat mortul. Săptămâni la rând, cei mai mari chirurgi ai lumii au vegheat la căpătâiul lui. De patru ori a murit tipul. De patru ori i-au insuflat o viaţă artificială, am uitat detaliile, dar îmi amintesc că lectura era pasionantă, toată lupta asta împotriva unei fatalităţi de neacceptat. Avea mormântul deschis, l-au smuls de acolo cu forţa. Şi-a reluat postul la universitatea din Moscova."

Paul Guimard, Les Choses de la vie

*

Legea gravitaţiei universale a lui Newton afirmă că două corpuri oarecare se atrag cu o forţă proporţională cu produsul maselor lor şi invers proporţională cu pătratul distanţei dintre ele

$$F = \frac{\mathcal{G}\, M_1\, M_2}{r^2}.$$

Această lege clasică a gravitaţiei explică bine mişcarea stelelor în galaxii. Dar chiar dacă legea lui Newton e simplă, numărul imens de stele dint-o galaxie face teoria dificilă. La urma urmei, chiar dacă înţelegem mişcarea fiecărui atom luat separat, nu înseamnă că am înţeles cum funcţionează o fiinţă umană…

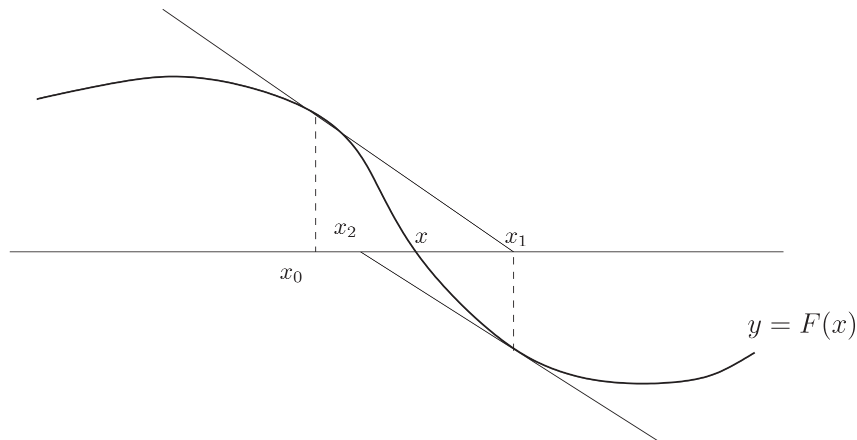
La câţiva ani după legea gravitaţiei, Newton făcea o altă descoperire extraordinară: schema de aproximare a lui Newton, care permite calculul soluţiei unei ecuaţii oarecare

$$F(x) = 0.$$

Pornind cu o aproximare x_0 a soluţiei, înlocuim funcţia F prin tangenta sa T_{x_0} în punctul $(x_0, F(x_0))$ – în termeni tehnici, liniarizăm ecuaţia în jurul lui x_0 –, şi rezolvăm ecuaţia aproximată

$T_{x_0}(x) = 0$. *Asta furnizează o nouă aproximație x_1 a soluției, şi o luăm de la capăt: înlocuim F prin tangenta sa T_{x_1} în x_1, definim x_2 ca soluție a lui $T_{x_1}(x_2) = 0$, şi aşa mai departe. În notații matematice precise, relația dintre x_n şi x_{n+1} este*

$$x_{n+1} = x_n - \left[DF(x_n)\right]^{-1} F(x_n).$$



Aproximațiile succesive x_1, x_2, x_3... astfel obținute sunt incredibil de bune: se apropie de soluția „adevărată“ cu o viteză fenomenală. Adesea, ajung patru sau cinci încercări pentru a obține o precizie superioară oricărui calculator



Isaac Newton

*

modern. Se zice că babilonienii foloseau deja metoda asta pentru extragerea rădăcinii pătrate acum patru mii de ani; Newton a descoperit că procedeul se aplică ecuațiilor de orice fel, nu numai calculului rădăcinii pătrate.

Mult mai târziu, convergența supranatural de rapidă a schemei lui Newton a fost folosită pentru a demonstra unele dintre rezultatele cele mai importante din secolul XX: teorema de stabilitate a lui Kolmogorov, teorema de scufundare izometrică a lui Nash… În sine, schema asta diabolică transcende distincția artificială dintre matematica pură şi matematica aplicată.

*

Matematicianul rus Andrei Kolmogorov e o figură legendară a istoriei ştiinței din secolul XX. E fondatorul teoriei moderne a probabilităților, în anii '30. Teoria sa despre turbulența fluidelor, elaborată în 1941, e încă un punct de referință, fie pentru a o ataca, fie pentru a o corobora. Teoria complexității elaborată de el prefigurează dezvoltarea inteligenței artificiale.

În 1954, la Congresul Internațional al Matematicienilor, a propus un enunț stupefiant. În timp ce Poincaré îşi convinsese colegii, încă de acum 70 de ani, că sistemul solar prezintă o instabilitate intrinsecă – anume că o incertitudine asupra poziției planetelor, oricât de mică ar fi ea, face imposibilă orice predicție asupra poziției acestor planete în viitorul îndepărtat –, Kolmogorov susține că sistemul solar este probabil *stabil – şi o face combinând, cu o îndrăzneală uluitoare, probabilitățile şi ecuațiile deterministe ale mecanicii. Instabilitatea e posibilă, după cum a înțeles Poincaré, doar Kolmogorov a arătat că aceasta nu apare decât rareori.*

Teorema lui Kolmogorov arată că, dacă se pleacă de la un sistem mecanic exact rezolubil (sistemul solar aşa cum îl imagina Kepler, cu planetele rotindu-se cuminți şi pentru totdeauna în jurul Soarelui, pe orbite eliptice neschimbate), şi dacă sistemul e perturbat foarte puțin (ținând cont de forțele de atracție gravitaționale între planete, pe care Kepler le neglija),

atunci sistemul astfel obținut rămâne stabil pentru majoritatea condițiilor inițiale.

Stilul eliptic al lui Kolmogorov şi complexitatea argumentelor i-au făcut pe contemporani neîncrezători. Cu metode diferite, rusul Vladimir Arnold şi germanul Jürgen Moser au reuşit să reconstituie demonstrații complete, primul pentru enunțul inițial al lui Kolmogorov, al doilea pentru o variantă mai generală. Era actul de naştere al teoriei K.A.M., care a generat câteva dintre cele mai puternice şi surprinzătoare pagini ale mecanicii clasice.



Andreï Kolmogorov

Frumusețea aparte a acestei teorii a obținut adeziunea oamenilor de ştiință, şi, timp de câteva decenii, s-a crezut într-un sistem solar stabil, deşi condițiile tehnice cerute de teoria lui Kolmogorov nu sunt complet îndeplinite în realitate. A trebuit să aşteptăm lucrările lui Jacques Laskar, de la sfârşitul anilor '80, pentru ca opiniile să se schimbe din nou. Dar asta e o altă poveste.

Capitolul 4

Chaillol, 15 aprilie 2008

Publicul îşi ține răsuflarea, profesorul dă semnalul, şi toți copiii îşi plimbă arcuşul pe corzi. După cum impune metoda Suzuki, părinții asistă la lecția colectivă. Oricum, în vila asta imensă, folosită în întregime pentru pregătirea muzicală, ce altceva să faci?

Părinții îşi reprimă strâmbăturile când notele scârțâie prea rău. Cei care au acceptat ieri să se facă de râs cântând la instrumentele copiilor, întru marea satisfacție a acestora din urmă, ştiu ce greu e să scoți un ton corect din instrumentele astea diabolice! Şi-apoi, azi e chiar o atmosferă frumoasă de lucru în bună dispoziție, copiii sunt fericiți.

Cu sau fără metoda Suzuki, ce contează dincolo de orice e harul pedagogic al profesorului, iar cel care-i predă violoncelul băiatului meu e pur şi simplu extraordinar.

Aşezat în primele rânduri, devorez *Galactic Dynamics*, bestsellerul lui Binney & Tremaine, cu entuziasmul unui copil care descoperă o lume nouă. N-aş fi crezut că ecuația lui Vlasov e atât de importantă în astrofizică. Boltzmann rămâne cea mai frumoasă ecuație din lume, dar nici Vlasov nu-i de lepădat!

În mintea mea, nu doar ecuația lui Vlasov îşi sporeşte prestigiul, dar şi stelele devin mai atrăgătoare. Galaxiile spiralate, aglomerările globulare – toate mi se păreau simpatice, da, nimic de zis… Dar acum, când am o cheie matematică pentru a le înțelege, e pur şi simplu pasionant.

În timpul scurs de la şedinţa de lucru cu Clément, mi-am refăcut calculele, încep să am nişte idei. Mormăi.

— Nu pricep, ăştia zic că amortizarea Landau e foarte diferită de amestecul fazelor… Dar mie mi se pare că e acelaşi lucru, de fapt. Hrmmrm.

Privire scurtă către drăgălaşele capete blonde. Totu-i în regulă.

— Hmmm, calculul ăsta nu arată rău. Şi nota asta din josul paginii, ce-o fi… Ce contează în ecuaţia liniarizată nu e analiza spectrală, e soluţia problemei Cauchy. Păi, da. E de bun simţ! Întotdeauna aşa mi s-a părut. Atunci cum fac ei chestia asta… Hmmm. Transformată Fourier. Clar, analiza Fourier, de când e ea, încă nu s-a inventat ceva mai bun. Transformată Laplace, relaţie de dispersie…

Învăţ repede, pătrund adânc, asimilez ca un copil care se impregnează cu o limbă străină.

Când se lasă noaptea, aşezat turceşte în mansardă, îmi schimb ideile devorând ultima culegere de nuvele a lui Neil Gaiman, *Fragile Things*, proaspătă, încă netradusă. Neil spune că avem datoria să ne spunem unul altuia poveşti. Are dreptate. Povestea unei improvizaţii geniale la contrabas. Povestea unei doamne bătrâne care-şi rememorează iubirile trecute. Povestea unui phoenix care tot învie şi e de fiecare dată gătit ca un fel de mâncare pentru cunoscători rafinaţi.

Când mă duc la culcare, mai rămân treaz o bună bucată de vreme. Imposibil să aprind lumina: toată familia doarme într-o singură cameră. Creierul meu bate câmpii. Bătrânele galaxii fragile improvizează o poveste à la Gaiman, problema matematică învie întruna pentru a fi gătită de cercetători. Stelele îmi cresc în creier. De fapt, ce teoremă vreau să demonstrez?

*

‚Crawcrustle’, said Jackie Newhouse, aflame, ‚answer me truly. How long have you been eating the Phoenix?’

‚A little over ten thousand years’, said Zebediah. ‚Give or take a few thousand. It’s not hard, once you master the trick of it that’s hard. But this is the best Phoenix I’ve ever prepared. Or do I mean, „This is the best I ever cooked this Phoenix“?’

‚The years!’ said Virginia Boote. ‚They are burning off you!’

‚They do that’, admitted Zebediah. ‚You’ve got to get used to the heat, though, before you eat it. Otherwise you can just burn away.’

‚Why did I not remember this?’ said Augustus TwoFeathers McCoy, through the bright flames that surrounded him. ‚Why did I not remember that this was how my father went, and his father before him, that each of them went to Heliopolis to eat the Phoenix? And why do I only remember it now?’

‚Shall we burn away to nothing?’ asked Virginia, now incandescent. ‚Or shall we burn back to childhood and burn back to ghosts and angels and then come forward again? It does not matter. Oh, Crusty, this is all such fun*!’*

Neil Gaiman, Fragile Things*

*

Analiza Fourier constă în studiul vibrațiilor elementare ale semnalelor. Să presupunem că vrem să analizăm un semnal oarecare, o cantitate care variază pe măsură ce trece timpul: sunetul, de exemplu, e format din mici variații ale presiunii atmosferice. În loc să se uite direct la variațiile complexe ale acestui semnal, Joseph Fourier, savant şi gânditor politic de la începutul secolului XIX, a avut ideea să-l descompună într-o combinație de semnale elementare, fiecare dintre ele având o variație foarte simplă şi repetitivă: sinusoide (şi gemenele lor, cosinusoidele).

---

* Traducerea textelor care apar în engleză e dată la sfârşitul cărții, în anexă. (*N. t.*)



Fiecare sinusoidă e caracterizată de amplitudinea şi de frecvenţa variaţiilor sale; în descompunerea lui Fourier, amplitudinile ne dau informaţii despre importanţa relativă a frecvenţelor corespunzătoare din semnalul studiat.

Astfel, sunetele care ne înconjoară sunt formate prin suprapunerea unei multitudini de frecvenţe. Vibraţia de 440 de bătăi pe secundă e un la *care va fi perceput cu atât mai puternic, cu cât amplitudinea lui e mai mare. La 880 de bătăi pe secundă, vom auzi un* la *din octava superioară. Dacă se multiplică frecvenţa cu 3, se trece la cvintă, adică la* mi*; şi aşa mai departe. Dar, în practică, sunetele nu sunt niciodată pure, ele sunt întotdeauna alcătuite din suprapunerea a numeroase frecvenţe care le determină timbrul; ca să-mi pregătesc teza de master, am studiat toate astea într-un curs pasionant, intitulat „Muzică şi matematică".*

Iar analiza Fourier e bună la orice: la analiza sunetelor şi la imprimarea lor pe CD, dar şi la analiza imaginilor şi la transmiterea lor prin Internet, sau la analiza variaţiilor nivelului mărilor şi la predicţia mareelor…

Victor Hugo îşi bătea joc de Joseph Fourier, „micuţul" prefect din Isère, punea pariu că gloria sa de academician şi

de om politic se va ofili curând. Îl compara cu omul politic Charles Fourier, „marele Fourier“, care avea să intre în posteritate grație ideilor sale sociale.

Nu sunt sigur că Charles Fourier a gustat complimentul. Socialiştii nu aveau încredere în Hugo, care era, desigur, cel mai mare scriitor al epocii, dar avea şi un solid trecut de giruetă politică, rând pe rând monarhist, bonapartist, orléanist, legitimist, înainte ca exilul să-l transforme în republican.

Cert este că – în ciuda respectului datorat scriitorului de mare talent, ale cărui opere le-am devorat în copilărie – influența lui Joseph Fourier e azi mult mai importantă decât a lui Hugo însuşi; „marele său poem matematic“ (cum spunea Lord Kelvin), predat în toate țările lumii, e folosit în fiecare zi de miliarde *de oameni, care nici măcar nu-şi dau seama de asta.*

*

<u>Ciornă din 19 aprilie 2008</u>

Pentru a obține formule, va trebui să luăm transformate în cele trei variabile x, v şi t. Notăm

$$\widehat{g}(k) = \int e^{-2i\pi x\cdot k} g(x)\,dx \qquad (k \in \mathbb{Z}^d)$$

$$\tilde{g}(k,\eta) = \int e^{-2i\pi x\cdot k}\, e^{-2i\pi v\cdot\eta} g(x,v)\,dv\,dx \quad (k \in \mathbb{Z}^d, \eta \in \mathbb{R}^d).$$

În fine, notăm

$$(\mathcal{L}g)(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} g(t)\,dt$$

(transformata Laplace).

Fixăm deocamdată $k \in \mathbb{Z}^d$.

Luând transformata Fourier în x a ecuației lui Vlasov găsim

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t} + 2i\pi(v\cdot k)\widehat{f} = 2i\pi(k\widehat{W}\widehat{\rho})\cdot\nabla_v f_0(v).$$

Cu formula lui Duhamel rezultă

$$\widehat{f}(t,k,v) = e^{-2i\pi(v\cdot k)t}\widehat{f}_i(k,v) + \int_0^t e^{-2i\pi(v\cdot k)(t-\tau)}\, 2i\pi\widehat{W}(k)\widehat{\rho}(\tau,k)\, k\cdot\nabla_v f_0(v)\, dv.$$

Integrând după v obținem

$$\begin{aligned}\widehat{\rho}(t,k) &= \int \widehat{f}(t,k,v)\, dv \\ &= \int e^{-2i\pi(v\cdot k)t}\widehat{f}_i(k,v)\, dv + \int_0^t 2i\pi\widehat{W}(k) \\ &\quad\times\left(\int e^{-2i\pi(v\cdot k)(t-\tau)}\, k\cdot\nabla_v f_0(v)\, dv\right)\widehat{\rho}(\tau,k)\, d\tau.\end{aligned}$$

(De introdus justificarea integrării după v... dar putem presupune întotdeauna de la început că datele sunt cu suport compact în viteză, apoi să ne apropiem? sau să trunchiem...)

Primul termen din membrul drept nu e decât $\tilde{f}_i(k,kt)$ *(același artificiu deja folosit pentru omogenizarea transportului liber...)*

Cu ipoteze slabe asupra lui f_0 *se poate scrie, pentru orice* $s\in\mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned}\int e^{-2i\pi(v\cdot k)s} k\cdot\nabla f_0(v)\, dv &= +2i\pi|k|^2 s\int e^{-2i\pi(v\cdot k)s}\, f_0(v)\, dv \\ &= 2i\pi|k|^2 s\tilde{f}_0(ks).\end{aligned}$$

Aşadar

$$\widehat{\rho}(t,k)=\tilde{f}_i(k,kt)-4\pi^2\widehat{W}(k)\int_0^t |k|^2(t-\tau)\tilde{f}_0(k(t-\tau))\widehat{\rho}(\tau,k)\,d\tau.$$

Să punem

$$p_0(\eta) = 4\pi^2\ \eta\ \tilde{f}_0(\eta).$$

(Nu ştiu dacă e o idee bună să-l pun pe 4π aici...) În unele cazuri (ca f_0 maxwelliană), p_0 e pozitivă; dar, în general, nu-i nici un motiv să fie aşa. Observăm că p_0 are descreştere rapidă dacă $f_0 \in W^{\infty,1}(\mathbb{R}^d)$; are descreştere exponenţială dacă f_0 e analitică etc. Până la urmă, obţinem

$$\widehat{\rho}(t,k) = \tilde{f}_i(k,kt) - \widehat{W}(k)\int_0^t p_0(k(t-\tau))\,\widehat{\rho}(\tau,k)\,|k|\,d\tau.$$

Luând transformata Laplace în $\lambda \in \mathbb{R}$ obţinem, dacă totul e bine definit,

$$(\mathcal{L}\widehat{\rho})(\lambda,k) = \int_0^\infty e^{\lambda t}\tilde{f}_i(k,kt)\,dt - \widehat{W}(k) \times \left(\int_0^\infty e^{\lambda t} p_0(kt)|k|\,dt\right)(\mathcal{L}\widehat{\rho})(\lambda,k);$$

de unde rezultă

$$(\mathcal{L}\widehat{\rho})(\lambda,k) = \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{\lambda t}\tilde{f}_i(k,kt)\,dt}{1+\widehat{W}(k)\,Z\left(\dfrac{\lambda}{|k|}\right)},$$

adică

$$Z(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} p_0(te)\,dt, \qquad |e| = 1.$$

Capitolul 5

Kyoto, 2 august 2008

Zgomotul asurzitor al greierilor a încetat, dar în căminul studențesc internațional Shugaku-in, căldura sufocantă nu se domolește până spre miezul nopții.

În timpul zilei, am încheiat o serie de cursuri destinate participanților la colocviu, cercetători și studenți veniți din cincisprezece țări. Prelegerile au fost bine primite. Am început la ora stabilită – cu aproximație de un minut – și am încheiat la ora stabilită – cu o aproximație de un minut. În țara asta, nu se pune problema să tratezi lejer programul, trebuie să fiu la fel de punctual ca feribotul care m-a adus la Hokkaido săptămâna trecută.

Seara, la cămin, le-am povestit copiilor aventurile lui Korako, micul corb japonez care se trezește într-o zi abandonat de părinți și pleacă într-o lungă călătorie prin Franța și Egipt, prin circuri și piețe arăbești, în căutarea unui cod secret, alături de foarte tânărul său stăpân Arthur. O poveste cu multe înflorituri, improvizată, o „poveste imaginară“, cum zice fetița mea, pe-astea le preferă – sunt și cele mai palpitante pentru povestitor.

Acum, copiii dorm și, de data asta, n-am întârziat să le urmez exemplul cel bun. După povestea imaginară pe care le-am servit-o tinerilor cercetători și după povestea imaginară a corbului pe care am inventat-o pentru copiii mei, mi-am câștigat dreptul să-mi spun și mie o poveste imaginară: creierul meu s-a aruncat într-un vis neverosimil.

Povestea ia proporții, şi mă trezesc brusc, puțin după 5:30. După secunda binecuvântată în care te întrebi pe ce continent îți vii în fire, mă apuc să notez pe laptop fragmentele rămase din vis, înainte să le şteargă bruma de dimineață. Complexitatea şi confuzia visului mă binedispun, le iau ca pe un semn de sănătate a creierului. Visele mele nu sunt atât de nebuneşti ca acelea pe care David B. le-a reprezentat în benzi desenate, dar sunt suficient de întortocheate ca să mă simt bine.

De câteva luni, am lăsat deoparte amortizarea Landau. N-am avansat în vreo demonstrație anume, dar am depăşit un prag: acum ştiu ce vreau să demonstrez. *Să arăt că o soluție a ecuației lui Vlasov neliniară, periodică în spațiu, apropiată de un echilibru stabil, evoluează spontan către un alt echilibru*. E un enunț abstract, dar bine ancorat în realitate, într-o tematică de mare importanță practică şi teoretică; o problemă care se enunță uşor, dar care e, probabil, dificil de demonstrat; o întrebare originală despre un model bine-cunoscut. Toată chestia asta-mi place grozav: păstrez problema într-un ungher al creierului, o s-o reiau toamna asta, în septembrie.

Dincolo de răspunsul la întrebare (adevărat sau fals), sper din tot sufletul să am multe de învățat din demonstrație! În matematică, e la fel ca într-un roman polițist sau ca într-un episod din *Columbo*: raționamentul prin care detectivul îl păcăleşte pe asasin e la fel de important ca soluția însăşi a misterului.

Până atunci, îmi cultiv alte iubiri: adaug un apendice la un memoriu scris cu doi în urmă; înaintez cu un articol care combină ecuațiile cineticii cu geometria riemanniană. Între *estimări ale pozitivității locale pentru ecuații hipoeliptice* şi *ecuația Fokker-Planck cinetică în geometria riemanniană*, n-am cum să mă plictisesc în lungile mele seri japoneze.

OPTIMAL TRANSPORT AND GEOMETRY

Kyoto, 28 July - 1 August 2008

Cédric Villani

ENS Lyon
& Institut Universitaire de France
& JSPS

Plan of the course (5 chapters)

- Basic theory
- The Wasserstein space
- Isoperimetric/Sobolev inequalities
- Concentration of measure
- Stability of a 4th order curvature condition

Most of the time statements, sometimes elements of proof

Gromov–Hausdorff stability of dual Kantorovich pb

- $(\mathcal{X}_k, d_k) \xrightarrow[k\to\infty]{GH} (\mathcal{X}, d)$ via ε_k-isometries $f_k : \mathcal{X}_k \to \mathcal{X}$
- $c_k(x,y) = d_k(x,y)^2/2$ on $\mathcal{X}_k \times \mathcal{X}_k$
- $\mu_k, \nu_k \in P(\mathcal{X}_k) \quad (f_k)_\# \mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu$, $(f_k)_\# \nu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \nu$
- $\psi_k : \mathcal{X}_k \to \mathbb{R}$ c_k-convex, $\psi_k^{c_k}(y) = \inf_x [\psi_k(x) + c_k(x,y)]$, achieving $\sup \left\{ \int \psi_k^{c_k}\, d\nu_k - \int \psi_k\, d\mu_k \right\}$

<u>Then</u> up to extr. $\exists\, a_k \in \mathbb{R}$ s.t. $(\psi_k - a_k) \circ f'_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \psi$,

$$\psi\ c\text{-convex achieving } \sup \left\{ \int \psi^c \, d\nu - \int \psi \, d\mu \right\}.$$

Moreover $\forall x \in \mathcal{X}$, $\limsup_{k\to\infty} f_k\Big(\partial_{c_k}\psi_k(f'_k(x))\Big) \subset \partial_c\psi(x)$.

*

<u>*Korako (extras din sinopsisul scris a posteriori)*</u>

La momentul oportun, Korako aruncă o fiolă cu sulf în adăpost, un truc pe care l-a învățat în anii de circ. Mirosul e cumplit, gardienilor li se face rău, iar Hamad şi Tchitchoun se apucă să umple gurile de aerisire cu nisip.

Ura! Cu funiile smulse, adăpostul se năruie, Hamad îi ucide pe toți... (Lungă descriere apocaliptică.) E găsit tatăl lui Arthur, la fel şi tovarăşul său de suferință. Fusese răpit ca să i se smulgă informații despre un document confidențial: un papirus vechi care conținea un secret cu care poți învia mumiile. Colegul lui era, la fel ca el, egiptolog, specialist în hieroglife.

Bandiții au fost luați prizonieri, sunt duşi la Nebun, li se spune că vor fi omorâți şi torturați dacă nu mărturisesc cine e şeful lor. Interogatoriile se țin lanț. Korako e stânjenit de felul în care reacționează tatăl lui Arthur. Cu atât mai mult cu cât pare să se simtă bine, cunoaşte locul ca şi cum ar fi trăit deja aici. Korako se hotărăşte să asiste la un interogatoriu de la care se întoarce cu o mare surpriză: Nebunul şi tatăl lui Arthur erau cunoştințe vechi. A doua zi se duce la Arthur şi îi dă vestea îngrijorătoare.

*

Vis din 2 august 2008 (note)

Fac parte dintr-un film istoric şi aparţin unei familii domnitoare. În vis, o parte istorică, în acelaşi timp film, iar eu particip concomitent la mai multe niveluri ale naraţiunii. Numai că prinţul chiar n-are noroc. Îl bat la cap întruna. Mulţimea, presa, presiune mare. Regele (= tatăl prinţesei) trage sfori, chestii cu bani, cu dedesubturi. Libertăţile nu sunt cu adevărat garantate. Mă înfurii pe *Le Monde* comentându-le prima pagină. Iar au făcut prostii în politică. Dar o mare preocupare internaţională se leagă de creşterea preţurilor materiilor prime, suferă ţările nordice, unde o parte importantă din venit e legată de transportul acestora, mai ales Islanda sau Groenlanda. În orice caz, nu se prevede vreo ameliorare. Vorbesc despre posibilitatea de a merge, de pildă, la Paris sau de a mă întâlni cu sportivi celebri, ei sunt adevăratele celebrităţi. Bat la fund hologramele care-i reprezintă pe copiii mei… Dar se hotărăşte o sinucidere colectivă. La ora stabilită, mă întreb dacă toată lumea e prezentă. Lipseşte Vincent Beffara, care juca rolul unuia dintre copii. Acum însă nu mai e potrivit cu rolul, filmările au durat prea mult, iar Vincent a crescut; în locul lui, folosim de două ori acelaşi actor, la final n-are prea multe de zis, un copil e de-ajuns. Sunt foarte emoţionat, declanşăm operaţiunile. Privesc afişele şi reclamele de pe ziduri, e vorba despre persecuţiile de demult împotriva unor ordine de maici, îşi despleteau părul înainte să meargă la moarte, iar asta era valabil pentru două ordine diferite, deşi, potrivit credinţei, numai cele dintr-un ordin anume mureau în felul acesta, numai ele trebuiau să se despletească. E şi un tablou intitulat *Elogiul disidenţei* sau ceva asemănător. În el, un fel de monştri/poliţişti înfulecă nişte manifestanţi care au un aer vag contestatar. O mai sărut o dată pe Claire, suntem foarte emoţionaţi. E aproape 5 dimineaţa, toată familia e aici, va trebui să apelăm la un serviciu de genul salubritate, cineva să-şi prefacă vocea,

să explice că avem nevoie de explozibil şi că-l pot trimite aici; dacă vor aduce vorba despre precauții sau aşa ceva, vom spune (în engleză): mulțumesc, tocmai am ieşit din ospiciu (se subînțelege: sunt periculos cu explozibilul ăsta), tipul o să creadă că e o glumă şi o să trimită totul, şi-atunci totul va sări în aer. Ora prevăzută e 5:30. Mă întreb dacă voi continua să trăiesc într-o realitate alternativă, dacă voi încerca într-o altă direcție, sau dacă voi renaşte ca bebeluş şi voi sta în purgatoriul inocenților ani de zile, înainte să-mi reapară conştiința… Sunt destul de îngrijorat. Trezirea la 5:35 (ora reală!).

Capitolul 6

Lyon, toamna 2008

Trec zile şi nopţi
în tovărăşia Problemei.

În apartamentul meu de la etajul cinci, în imobilul fără ascensor în care locuiesc, la birou, în pat…

În fotoliu, în fiecare seară, cu fiecare ceai, explorând piste şi sub-piste, notând meticulos toate posibilităţile, eliminând drumurile înfundate pe măsură ce apar.

Într-o zi din octombrie, o matematiciană coreeană, fostă elevă a lui Yan Guo, mi-a trimis un manuscris despre amortizarea Landau, pentru o eventuală publicare într-o revistă la care sunt editor: „*On the existence of exponentially decreasing solutions of the nonlinear Landau damping problem*".

O clipă, am crezut că ea şi colaboratorul ei au demonstrat rezultatul la care ţin atât de mult: construiesc soluţii ale ecuaţiei Vlasov care relaxează în mod spontan către un echilibru! I-am scris imediat editorului-şef că sunt în conflict de interese şi nu mă pot ocupa de acest manuscris.

Dar, uitându-mă mai atent, am înţeles că erau departe de ţel: demonstrau numai existenţa anumitor soluţii amortizate; or, ceea ce trebuie demonstrat e că toate sunt aşa! Dacă ştim doar că unele soluţii sunt amortizate, nu vom şti niciodată dacă nimerim pe una dintre ele… şi-apoi, un articol a doi italieni, publicat acum zece ani, demonstra un rezultat destul de apropiat, cei de-acum nu păreau să fie la curent.

Nu, Problema n-a cedat. Ar fi fost, de altfel, dezamăgitor să fie aşa simplu! Un articol de vreo treizeci de pagini, bun, dar fără dificultăți majore. În străfundul meu, sunt convins că soluția cere mijloace complet noi şi trebuie să ne aducă, în plus, o privire nouă asupra problemei.

— Am nevoie de o normă nouă.

O normă, în jargon matematic, e o regulă pe care ți-o dai pentru a măsura mărimea cantității care te interesează. Dacă faceți o comparație între pluviometria la Brest şi la Bordeaux, cum procedați: comparați precipitațiile maxime dintr-o zi, sau integrați pe tot anul? Dacă se compară maximumul, folosiți norma sup care răspunde la gingaşul nume de normă L^∞. Dacă se compară cantitățile integrate, e vorba despre o altă normă, căreia i se spune L^1. Şi mai sunt multe altele.

Pentru a se putea numi „normă“, trebuie să verifice câteva proprietăți; de exemplu, norma unei sume de doi termeni trebuie să fie inferioară sau egală cu suma normelor acestor termeni luați separat. Dar asta încă lasă multe alegeri posibile.

— Am nevoie de norma cea bună.

De mai bine de un secol, de când a fost formalizat conceptul de normă, matematicienii le-au tot inventat. Cursul pe care îl predau la anul al doilea la ENS Lyon e plin de ele. Norme ale lui Lebesgue, Sobolev, Hilbert, Lorentz, Besov, Hölder, normele lui Marcinkiewicz şi Lizorkin. Norme L^p, $W^{s,p}$, H^s, $L^{p,q}$, $B^{s,p,q}$, H^α, M^p, $F^{s,p,q}$ şi câte şi mai câte!

De data asta însă, nici una dintre normele pe care le ştiu nu pare potrivită. Trebuie să meşteresc una nouă, s-o scot dintr-un mare joben matematic.

— Norma visurilor mele va trebui să fie aproape stabilă la compunere în vecinătatea identității… şi să se acomodeze cu filamentarea proprie ecuației lui Vlasov în timp mare. *Gott im Himmel*, cum ar putea? Am încercat să iau sup-ul cu ponderi, poate-o fi necesar să introduc o întârziere… Vorbind cu Clément, zisesem că trebuie să păstrăm memoria timpului scurs,

să comparăm cu soluția transportului liber, OK, n-am nimic împotrivă, dar în ce sens trebuie să fac comparația?

Într-o zi, citind din nou tratatul lui Alinhac-Gérard, am remarcat un exercițiu. Să se arate că o anumită normă *W* e o normă de algebră. Altfel spus, norma *W* a produsului a doi termeni este cel mult egală cu produsul normelor *W* ale acestor doi termeni luați separat. Știu exercițiul ăsta de mult, dar, revăzându-l, am început să bănuiesc că ar putea fi util în Problemă.

— Uau, dar ar trebui să modific evaluarea în 0 punând un sup, sau măcar o integrală, şi asta n-o să meargă în variabila de poziție, îmi va trebui încă o normă de algebră… poate cu Fourier?

Pe 19 noiembrie, după câteva încercări nereuşite, cred că am găsit norma. Pe vremea aceea, înnegream paginile în fiecare seară şi-i trimiteam lui Clément rezultatele pe măsură ce scriam. Maşina se pornise. *Cédurak go!*

*

Fie D discul unitate din $\mathbb{C}$ *şi fie W(D) spațiul funcțiilor olomorfe pe D care satisfac condiția*

$$\|f\|_{W(D)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} < +\infty.$$

Să se arate că, dacă $f \in W(D)$ *şi dacă g e olomorfă în vecinătatea valorilor luate de f pe D, atunci* $g \circ f \in W(D)$.
Indicație: se va observa că $\|h\|_{W(D)} \leq C \sup_{z\in D}\big(|h(z)| + |h''(z)|\big)$, *şi că W(D) e o algebră; apoi se va scrie* $f = f_1 + f_2$ *cu* $f_2(z) = \sum_{n>N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, *N fiind ales suficient de mare pentru ca seria* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(f_1)}{n!} f_2^n$ *să fie bine definită şi convergentă în W(D).*

S Alinhac & P. Gérard
Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser
(capitolul III, exercițiul A.1.a)

*

Date: Tue, 18 Nov 2008 10:13:41 +0100
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: Dimanche IHP

M-am uitat pe ultimele tale mailuri, o sa citesc atent, ridic manusa ca sa incerc sa integrez totul intr-o teorema de stabilitate pentru solutia transportului cu perturbare analitica mica! urmarea curind! clement

Date: Tue, 18 Nov 2008 16:23:17 +0100
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: Dimanche IHP

O remarca vaga dupa ce m-am uitat la un articol al lui Tao (ma rog, rezumatul pe care l-a pus pe blog) despre turbulenta slabă si Schrodinger cubic 2d defocusant.

Definitia sa pentru turbulenta slaba e: pierderea masei in variabila frecventa asimptotic, iar definitia lui pentru turbulenta tare este: pierderea masei in variabila frecventa in timp finit. Uite conjectura pe care-o formuleaza pentru ecuatia lui: Conjectura.* (Weak turbulence) There exist smooth solutions u(t,x) to (1) such that \|u(t)\|_{H^s({\Bbb T}^2)} goes to infinity as t \to \infty for any s>1.

De vazut daca se poate arata asta si pentru solutiile pe care incercam sa le construim (pentru transportul liber, derivatele in x chiar explodeaza). Ca si in cazul nostru, se pare ca au

nevoie de marginire prin tor pentru a putea vedea fenomenul fara sa-l anuleze dispersia in variabila reala x. Dimpotriva o smecherie pe care n-o pricep e ca sustine ca acest fenomen e neliniar si ca nu poate fi observat in cazurile liniare. In cazul nostru pare prezent deja la nivel liniar…

va urma, clement

Date: Wed, 19 Nov 2008 00:21:40 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: Dimanche IHP

Asadar, uite ce-am facut azi. Am pus cateva observatii in plus in fisierul Estimari, suprimat prima sectiune care devenise mai degraba caduca si regrupat variile estimari dispersate prin diferite fisiere, asa incit totul e in mare intr-un singur fisier.
Cred ca inca nu ne-am lamurit asupra normei cu care sa lucram:
— cum ecuatia in \rho in cazul unui camp omogen nu e integrala decat in timp (!) suntem obligati sa lucram intr-o norma fixata care, in consecinta, trebuie sa fie _stabila_ fata de actiunea prin compunerea cu \Om.
— pare ca se impune Fourier ca sa avem preschimbarea analiticului in descrestere exponentiala. Nu stiu sa fac convergenta exponentiala direct, fara Fourier, sigur ar trebui sa fie fezabil.
— cum schimbarea de variabila e in (x,v) si transformata Fourier a lui \rho e un Dirac in \eta, am impresia ca avem nevoie de o norma analitica de tipul L^2 in k si L^1 in \eta.
— dar compunerea sigur n-o sa fie niciodata continua intr-un spatiu de tip L^1, deci nu-i asta, trebuie sa fim foarte isteti, probabil sa incepem "integrand"

\eta. Ar ramane o norma de tip L^2 analitica in variabila k.
Concluzie: Trebuie sa fim si mai isteti.

Va urma,
Cedric

Date: Wed, 19 Nov 2008 00:38:53 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: Dimanche IHP

On 11/19/08, 00h21, Cedric Villani wrote:
> Concluzie: Trebuie sa fim si mai isteti.
Right now impresia mea e ca pentru a o scoate la capat avem nevoie de teorema asta de continuitate a compunerii cu Omega pentru norma analitica L^2 in Fourier (fara pierderea ponderilor…) si considerand \eta ca pe un parametru. Asta e, pe maine :-)

Date: Wed, 19 Nov 2008 10:07:14 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: Dimanche IHP

Dupa o noapte de somn mi se pare NEREALIST: actiunea prin compunere cu Omega va duce AUTOMAT la o mica pierdere in lambda (oricum asa se intampla cand Omega=(1-epsilon)Id). Asa ca va trebui sa ne obisnuim cu asta in ciuda aparentelor.
Va urma…
Cedric

Date: Wed, 19 Nov 2008 13:18:40 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: update

Atasat fisierul adus la zi:
Am adaugat subsectiunea 3.2 in care examinez o obiectie de fond aparent legata de o chestie despre care-am vorbit la telefon, problema pierderii de spatiu functional provocata de schimbarea de variabila. Concluzia e ca nu e nimic pierdut, dar va trebui sa fim foarte exacti in privinta estimarilor schimbarii de variabila.
Cedric

Date: Wed, 19 Nov 2008 14:28:46 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: update

Inca o adaugire la sfarsitul sectiunii 3.2. Acum arata destul de bine.

Date: Wed, 19 Nov 2008 18:06:37 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: update

Cred ca actuala sectiune 5 e gresita!! Problema apare dupa locul in care scrii „Repartizand puterile si factorialele": randul care urmeaza arata OK, dar in formula de mai jos indicii nu se mai potrivesc (N_{ k-i+1} /(k-i+1)! ar trebui sa dea N_k/k! si nu N_k/(k+1)!)
De fapt, rezultatul mi se parea mult prea tare. Ar fi insemnat ca prin compunerea cu o aproximare a identitatii se pastreaza acelasi indice al normei analitice. In timp ce eu cred ca ar trebui sa tintim ceva de tipul

```
\|f\circ G\|_\lambda \leq const.
                         \|f\|_{\lambda \|G\|} \|G\|
```
sau ceva in genul asta.
Va urma,
Cedric

Date: Wed, 19 Nov 2008 22:26:10 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: good news

Din versiunea atasata am eliminat sectiunea 5 cu bugul (putem s-o recuperam oricand la nevoie) si am inlocuit-o cu calcule despre compunere, folosind tot aceleasi variante analitice care, de data asta, parca merg ca unse fata de compunere (formula pe care o sugerasem nu e cea buna, pana la urma e si mai simpla, dar de acelasi tip).

Va urma, Cedric

Date: Wed, 19 Nov 2008 23:28:56 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: good news

Noua versiune atasata. Am verificat ca acel calcul obisnuit se poate face cu norma sugerata de regula de compunere (sectiunea 5.1). E un piculet mai complicat dar pare sa dea acelasi tip de rezultat.
Gata pe azi.
Cedric.

Capitolul 7

Bourgon-Jallieu, 4 decembrie 2008

Farurile ieşite din beznă mă orbesc la ieşirea din parking. Mă apropii, e a treia încercare.

— Scuzați, mergeți cumva la Lyon?

— Păi… da.

— Mă puteți lua şi pe mine? La ora asta nu mai sunt trenuri!

Şoferița ezită o clipă, aruncă o privire către pasageri şi mă invită să urc în spate. Mă aşez.

— Mii de mulțumiri!

— Ați fost la concert, nu?

— Da, da, a fost tare mişto.

— Îhî, foarte fain.

— După ce-am ascultat douăzeci de ani Têtes Raides*, nu puteam pierde ocazia asta. Dar detest să conduc, aşa c-am venit cu trenul, spunându-mi că nu se poate să nu găsesc un lionez care să mă aducă în oraş.

— Cu plăcere, nici o problemă. Eu am venit cu fiul meu, iar cel de lângă dumneavoastră e prietenul lui.

Bună seara tuturor…

— Pogo-ul n-a fost prea dur, sala era mare, nu ne călcam pe picioare, a fost în regulă.

— Da, fetele n-au avut de ce să se plângă.

— Lasă, că unora le place când se-ncinge mai tare!

---

* Grup francez de folk-rock. (*N. t.*)

Nostalgia după o fermecătoare punkistă cu piercinguri, debordând de energie, pe care hazardul unui pogo mi-o aruncase în brațe la un concert al lui Pigalle.

— E drăguț păianjenul dumneavoastră.

— Da, port întotdeauna un păianjen, ăsta-i stilul meu, le comand special la Lyon. Atelierul Libellule.

— Sunteți muzician?

— Nu!

— Artist?

— Matematician!

— Poftim, matematician?

— Da, da… există şi-aşa ceva!

— Şi cu ce vă ocupați?

— Hmmm, *chiar* vreți să ştiți?

— Pe bune, nu fac mişto.

Trag aer în piept.

— Am dezvoltat o noțiune sintetică de curbură Ricci minorată în spațiile metrice complete cu măsură şi local compacte.

— Poftim?! Faceți mişto de mine?

— Deloc. E un articol care a avut o mulțime de ecouri în comunitate.

— Puteți să repetați? Sună prea fain!

— Păi, da, am dezvoltat o noțiune sintetică de curbură Ricci minorată în spațiile metrice cu măsură separabile, complete şi local compacte.

— Uau! Şi la ce-i bună?

S-a spart gheața, îmi dau drumul. Explic pe îndelete, vorbesc, demistific. Teoria relativității a lui Einstein, curbura care deviază razele de lumină. Curbura, piatra unghiulară a geometriei neeuclidiene. Curbura pozitivă, razele se apropie; curbura negativă, razele se depărtează. Curbura, care se explică prin cuvinte din optică, se poate exprima şi prin cuvintele fizicii statistice: densitate, entropie, dezordine, energie cinetică, energie minimă… asta-i descoperirea pe care am făcut-o împreună cu

câțiva colaboratori. Cum să vorbești despre curbură într-un spațiu cu țepi ca un arici? Problema transportului optimal, care se înâlnește în inginerie, în meteorologie, în informatică, în geometrie. Cartea mea de o mie de pagini. Vorbesc, vorbesc pe măsură ce kilometrii se scurg.

— Gata, intrăm în Lyon. Unde vă las?

— Locuiesc în arondismentul unu – cartierul intelectualilor! Dar lăsați-mă unde vă e mai comod, mă descurc.

— Nici o problemă, vă duc acasă, doar să-mi spuneți pe unde o iau.

— Super. Cât vă datorez, pot să contribui la taxa de autostradă?

— Lăsați, nu e cazul.

— Mulțumesc, sunteți minunată.

— Înainte să plecați, puteți să-mi scrieți o formulă matematică?

*

Două figuri extrase din *Optimal Transport, Old and New*, C. Villani, Springer-Verlag, 2008.

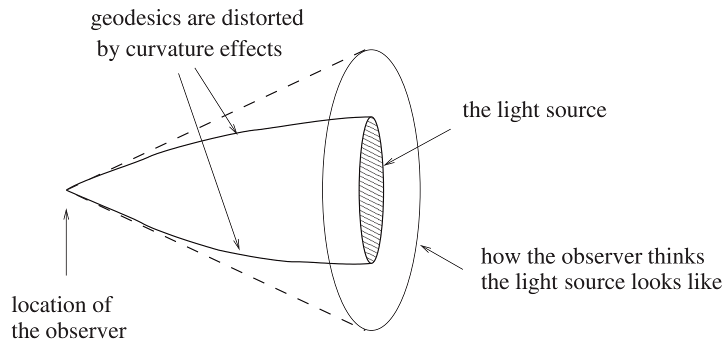


FIG.14.4 – The meaning of distortion coefficients: Because of positive curvature effects, the observer overestimates the surface of the light source; in a negatively curved world this would be the contrary.

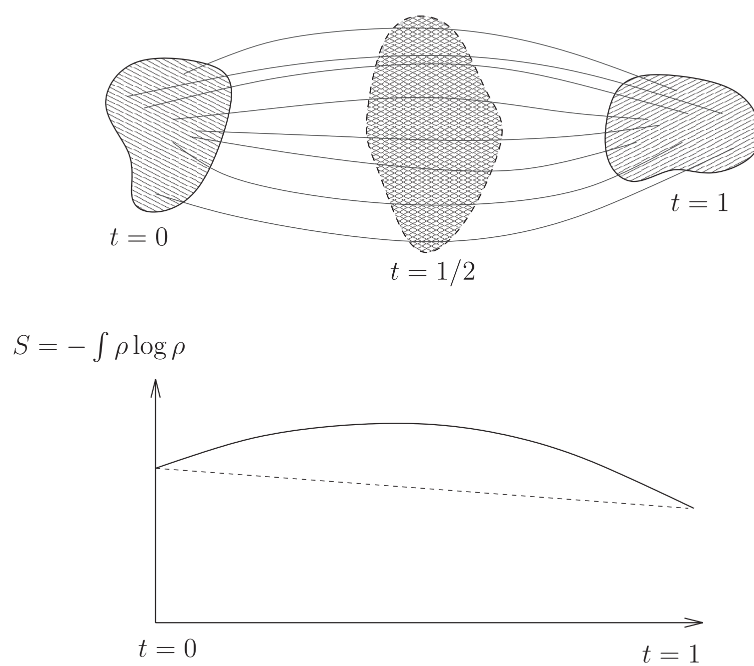


FIG. 16.2 – The lazy gas experiment: To go from state 0 to state 1, the lazy gas uses a path of least action. In a nonnegatively curved world, the trajectories of the particles first diverge, then converge, so that at intermediate times the gas can afford to have a lower density (higher entropy).

Capitolul 8

Un sat din departamentul Drôme, 25 decembrie 2008

Sărbători cu familia. Am înaintat bine.

Patru fişiere informatice, aduse la zi simultan pe măsură ce progresăm, conțin tot ce am înțeles despre amortizarea Landau. Patru fişiere pe care le-am schimbat între noi, le-am completat, corectat, luat din nou la mână şi le-am presărat cu note – **NdCM** pentru observațiile lui Clément, **NdCV** pentru ale lui Cédric. Scrise în limbajul TEX al lui Knuth, maestrul nostru, al tuturor, sunt cum nu se poate mai potrivite pentru manevrele noastre de apropiere.

Acum câtva timp, ne-am revăzut la Lyon, şi Clément a tunat împotriva unei inegalități pe care o scrisesem într-unul din fişiere:

$$\|e^{if}\|_\lambda \leq e^{\|f\|'_\lambda}.$$

Se jura că nu reuşeşte să priceapă cum puteam să susțin aşa ceva şi am fost nevoit să recunosc că vorbele mi-o luaseră înaintea gândului. Mi s-a părut că e evidentă inegalitatea asta, dar acum, gândindu-mă mai bine, nu ştiam ce mă făcuse s-o scriu şi nici de ce mi se păruse evidentă.

Nici în ziua de azi nu ştiu cum de-am crezut în inegalitatea aceea, dar am înțeles de ce e adevărată! Din cauza formulei lui Faà di Bruno.

Acum şaisprezece ani, la Şcoala Normală Superioară din Paris, profesorul nostru de geometrie diferențială ne prezentase această formulă care dă derivatele succesive ale funcțiilor

compuse; era atât de complicată, încât am primit-o cu râsete, iar el a fost nevoit să se scuze cu un aer jalnic şi autoironic: „Nu râdeți, e foarte utilă!“

Şi într-adevăr, formula asta e utilă, avea dreptate: mulțumită ei e adevărată misterioasa mea inegalitate!

Acestea fiind spuse, trebuia să avem răbdare. Jur (în fața lui Boltzmann, Knuth şi Landau la un loc) că timp de şaisprezece ani formula asta nu-mi servise la nimic, aşa că-i uitasem până şi numele, altminteri deloc banal.

Dar îmi rămăsese într-un colțişor al creierului: există o formulă pentru derivatele funcțiilor compuse… Cu Google şi cu Wikipedia, n-am avut nevoie decât de câteva clipe ca să regăsesc numele formulei şi formula însăşi.

În orice caz, apariția formulei lui Faà di Bruno e simptomatică pentru înfățişarea combinatorie neaşteptată pe care o ia lucrarea noastră. Notele mele sunt acoperite de obicei cu urechi de violoncel (integrale: $\int$ – am scris atâtea, că-mi vin în minte automat de îndată ce mă concentrez!); de data asta, notele mele sunt infestate de exponenți între paranteze (derivate multiple: $f^{(4)} = f''''$) şi cu puncte de exclamație (factoriale: $16! = 1\times 2 \times 3 \times \ldots \times 16$).

De fapt, se potriveşte: în timp ce copiii îşi deschid excitați cadourile de Crăciun, eu agăț exponenți la funcții ca globurile-n brad şi aliniez factoriale ca tot atâtea lumânări răsturnate.

*

Donald Knuth este Dumnezeul viu al informaticii. „Dac-ar intra în sală în timpul conferinței“, spunea într-o zi un amic, „toți participanții i-ar cădea în genunchi“.

Profesor la Universitatea Stanford, Knuth a ieşit anticipat la pensie şi şi-a tăiat poşta electronică pentru a se consacra în întregime încheierii operei sale majore, Arta programării*, începută cu cincizeci de ani în urmă, ale cărei câteva volume deja apărute au revoluționat domeniul.*



Donald Knuth

Publicând minunile astea, Knuth şi-a dat seama de calitatea grafică jalnică a formulelor matematice, aşa cum erau ele redate cu softurile disponibile în comerț; şi-a făgăduit să vindece pentru totdeauna răul. Nu era de-ajuns să schimbe editorul sau fonturile, s-a hotărât să schimbe întreg procesul din rădăcină. În 1989, a publicat prima versiune stabilă a softului TEX, devenit astăzi standardul cu care toți matematicienii îşi compun şi comunică articolele.

Acest nou strat de universalitate şi-a jucat din plin rolul atunci când schimburile matematice au devenit masiv electronice, la începutul secolului XXI.

Limbajul lui Knuth şi derivatele sale sunt softuri libere ale căror coduri sunt accesibile oricui. Matematicienii îşi trimit unul altuia numai fişierul sursă, fişier-text constituit doar din caractere ASCII, recunoscute de toate calculatoarele din lume. Acest fişier conține, într-un limbaj sobru, toate instrucțiunile necesare pentru a reconstitui textele şi formulele în cele mai mici detalii.

Mulțumită acestui soft, dintre toți cei aflați în viață, Knuth e probabil acela care a schimbat cel mai mult viața de zi cu zi a matematicienilor.

Knuth n-a încetat să-şi perfecţioneze creaţia, atribuindu-i numere de versiuni care sunt aproximaţii ale lui π, cu atât mai precise cu cât softul e mai complet: după versiunea 3.14 urmează versiunea 3.141, apoi 3.1415 etc. Versiunea curentă este 3.1415926; conform testamentului lui Knuth, va trece la π în ziua morţii sale, încremenind astfel TEX pentru eternitate.

*

Formula lui Faà di Bruno (Arbogast 1800, Faà di Bruno 1855)

$$(f\circ H)^{(n)} = \sum_{\sum_{j=1}^n j\, m_j=n} \frac{n!}{m_1!\ldots m_n!}\, \bigl(f^{(m_1+\ldots+m_n)}\circ H\bigr) \prod_{j=1}^n \left(\frac{H^{(j)}}{j!}\right)^{m_j}$$

… Ceea ce în TEX se scrie

```
\[ f\circ H)^{ (n)} =\sum_{ \sum_{ j=1} ^n j\,
m_j=n} \frac{ n!} { m_1!\ldots m_n!} \,
\bigl(f^{ m_1+\cdots+\m_n} \circ H\bigr)\,
\prod_{ j=1} ^n\left(\frac{ H^{ (j)} } { j!} \right)^{ m_j} \]
```

*

```
Date: Thu, 25 Dec 2008 12:27:14 +0100 (MET)
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Re: partile 1 si 2, aproape gata

Uite, de Craciun ai dreptul si la partea a II-a.
Arata foarte bine, pana la urma, in mare, totul
merge mai bine decat puteam spera (doar ca
pierderea in exponent pare sa fie cel putin ca
radacina cubica din marimea perturbarii, dar nu-s
motive sa nu putem corecta asta printr-o schema
iterativa de tip Newton). Iti trimit ambele fisiere:
analitic si scattering, deocamdata nu ma mai ating
de ele. Trebuie recitite la virgula, dar cred ca
acum prioritatea e sa facem sa convearga partile 3
```

si 4 (edp si interpolare), sugerez sa-mi trimiti edp care pare sa stea oarecum in picioare chiar daca nu s-a subtiat destul; asa o sa putem sa tragem in paralel pe edp si pe interpolare. (Ma ocup eu de redactat in engleza si de fatuit…)
Si Craciun fericit!
Cedric

Date: Thu, 25 Dec 2008 16:48:04 +0100
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: partile 1 si 2, aproape gata

Craciun fericit si multam pentru cadouri ;)!!
Lucrez la fisierul edp sa fac o teorema completa despre norma sup si mixta, cred ca am sanse mari chiar si in norma mixta de fapt (pentru scattering e intr-adevar in norma conform ultimului tau fisier, deci pare necesar). Pentru fisierul de interpolare, inegalitatea lui Nash precizata de care aveam nevoie e redactata (in franceza) in versiunea pe care ti-o trimisesem, spune-mi daca mai trebuie sa adaug ceva. Urmarea foarte curand! Cu prietenie, Clement

Date: Fri, 26 Dec 2008 17:10:26 +0100
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: partile 1 si 2, aproape gata

Salut,
Uite o versiune preliminara, in engleza, a teoremei edp completa in norma ta mixta. Incepe la pagina 15 a fisierului. Ti-o trimit deja ca sa-ti faci o idee, chiar daca mai am de verificat niste chestii la detaliile de calcul si la indici…, si limitarea la timp marginit care e bizara deocamdata. In orice caz norma mixta pare sa se comporte foarte bine

fata de rationamentul pe care-l faceam despre transferurile de derivate cu normele fara Fourier. Am pus la inceputul sectiunii 4 cu teorema respectiva si observatii despre motivul pentru care mi se pare ca merge bine chestia asta. Dimpotriva lucrez tot cu o norma cu patru indici (chiar daca e o norma mixta, dupa definitia ta) si de fapt deocamdata nu prea vad cum sa trec la doar trei indici…
O sa ma mai gandesc.
Cu prietenie,
Clement

Date: Fri, 26 Dec 2008 20:24:12 +0100
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: partile 1 si 2, aproape gata

Ceea ce numeam „limitarea la timp marginit" e faptul ca pierderea in indice datorata scattering-ului fiind liniara in timp, asa cum am pus-o in ipoteza, dadea un timp marginit pentru a nu avea o pierdere mai mare decat o anumita constanta. Dar din fisierul tau „analitic" mi se pare ca ipoteza ar trebui sa poata fi intarita in ceva ca pierderea
$$
\varepsilon \, \min \{ 1, (t-s) \}
$$
ceea ce ar permite ca aceasta pierdere sa ramana mica pentru t mare si s departe de t…
a+, clement

Capitolul 9

Princeton, 1 ianuarie 2009

Beznă adâncă, şoferul de taxi e complet pierdut. GPS-ul îi indică o direcţie evident aiurea, direct în copaci.

Încerc să fac apel la bun-simţ: am mai trecut pe-aici, e clar că GPS-ul nu-i actualizat, ar trebui să explorăm împrejurimile. S-ar părea că ne-am rătăcit şi e limpede că, dacă urmăm indicaţiile aparatului, o să ne împotmolim de tot!

În spate, copiii sunt indiferenţi. Fetiţa a adormit, obosită de călătoria cu avionul şi de decalajul orar. Băiatul observă tăcut. Are doar opt ani şi a fost deja în Taiwan, în Japonia, Italia, Australia şi în California, aşa că n-o să-l îngrijoreze un taxi pierdut în mijlocul unei păduri din New Jersey în miezul nopţii, ştie că până la urmă se-aranjează toate.

Ne învârtim în cerc, dăm iar peste un pic de civilizaţie şi peste o fiinţă umană într-o staţie de autobuz, cerem indicaţii. Doar nu e GPS-ul deţinătorul absolut al adevărului topografic.

În fine, ni se arată Institutul pentru Studii Avansate – IAS pentru intimi. Atât de impunător, drept în mijlocul pădurii, aduce un pic cu un castel. Ca să ajungi la el, trebuie să ocoleşti terenul de golf, foarte întins.

Aici şi-a petrecut Einstein ultimii douăzeci de ani din viaţă. Sigur că, pe-atunci, nu mai era tânărul vivace din 1905 care revoluţionase fizica. A marcat totuşi locul acesta prin prezenţa lui mai mult decât oricine altcineva. Şi-apoi, au mai fost John von Neumann, Kurt Gödel, Hermann Weyl, Robert Oppenheimer,

Ernst Kantorowicz, John Nash, toți aceşti mari gânditori la auzul numelor cărora te înfiori.

Acum sunt Jean Bourgain, Enrico Bompieri, Freeman Dyson, Edward Witten, Vladimir Voevodsky şi mulți alții… IAS poate pretinde titlul de templu al matematicii şi al fizicii teoretice mai curând decât Harvard, Berkely, New York sau vreo altă instituție. Sigur, nu sunt atâția matematicieni ca la Paris, capitala mondială a matematicii; dar la IAS e distilatul, topul topului.

Şi chiar alături e Universitatea Princeton, cu Charles Fefferman, Andrei Okounkov şi alții. La Princeton, medaliile Fields sunt o banalitate, ai uneori alături trei sau patru la prânz! Ca să nu mai vorbim de Andrew Wiles, care n-a luat medalia Fields, dar a cărui popularitate a depăşit-o pe a oricărui alt matematician când a rezolvat marea enigmă lăsată de Fermat, cea care l-a aşteptat trei sute cincizeci de ani pe Făt-Frumos.* Pe scurt, dacă ar exista paparazzi specializați în mari matematicieni, şi-ar putea planta aparatele de fotografiat în refectoriul IAS şi ar avea zilnic imagini proaspete.

Ai la ce visa… dar nu e timp, trebuie găsită rezidența, apartamentul unde vom locui şase luni şi-apoi, pentru început, să dormim.

Ce-o să fac eu vreme de şase luni în orăşelul ăsta?

De lucru am, nu-i vorbă! De concentrare am nevoie. Voi putea să mă consacru în întregime iubirilor mele matematice!

În primul rând, trebuie să pot suci în fine gâtul acestei amortizări Landau. Am avansat serios, cadrul funcțional e

---

* Despre Andrew Wiles şi demonstrația pe care a dat-o teoremei lui Fermat, vezi cartea lui Simon Singh *Marea teoremă a lui Fermat* (Editura Humanitas, Bucureşti, 2012). (*N. t.*)

gata, hai, îmi mai dau două săptămâni să pun punct. Şi apoi să închei un alt proiect, pe cel cu Alessio şi Ludovic, nu se poate să nu găsim nenorocitul ăla de contraexemplu ca să demonstrăm că în dimensiune 3 sau mai mare domeniile de injectivitate ale unei metrici riemanniene aproape sferice nu sunt neapărat convexe. O să-l găsim, iar asta o să ucidă teoria regularităţii transportului optimal neeuclidian!

Apoi îmi mai rămân cinci luni, o să le petrec cu marele meu vis, regularitatea pentru Boltzmann! Mi-am adus notiţe mâzgălite în douăzeci de ţări diferite.

Cinci luni s-ar putea să n-ajungă. Aş vrea să-i pot dedica doi ani, tot finalul mandatului meu la Institutul Universitar al Franţei, mandatul acesta în timpul căruia am normă didactică redusă ca să-mi duc cu bine la capăt marile proiecte de cercetare.

Dar m-am tot băgat în alte proiecte. A fost a doua carte despre transport optimal, începută în ianuarie 2005. Iniţial, voiam să mă mărginesc la 150 de pagini şi să predau textul în iulie 2005; până la urmă au ieşit 1 000 de pagini care au fost gata în iunie 2008. De mai multe ori am vrut să mă opresc, ca să mă întorc la Boltzmann. Dar am preferat să continui. De fapt, nu prea ştiu dacă aveam de ales: cartea a decis totul, nu putea fi altfel.

Am întârziat uneori, din motive la care ţin mult... dar nu contează.

Însă iată că nu-mi mai rămân decât optsprezece luni cu norma didactică redusă, şi nici măcar n-am început ceea ce urma să fie Marele meu Proiect despre ecuaţia lui Boltzmann. Aşa că invitaţia asta la Princeton a picat la ţanc. Carte – nu, sarcini administrative – nu, cursuri – nu, o să pot face matematică la foc continuu! Tot ce mi se cere e să particip din când în când la discuţii şi seminarii de analiză geometrică – tema anului la Institute for Advanced Studies.

În schimb, în laborator, n-au fost toţi mulţumiţi. Mă vedeau director al laboratorului începând din ianuarie 2009, iar

eu tocmai atunci am bătut în retragere. Nimic de făcut, sunt momente când e bine să fii egoist. La urma urmei, am muncit ani la rând pentru a dezvolta echipa de la ENS Lyon şi, odată închisă paranteza asta princetoniană, o să tot primesc sarcini administrative pentru binele general.

Şi-apoi, e vorba despre Medalie!

Medalia Fields, cea pe care pretendenţii abia îndrăznesc s-o numească, MF. Recompensa supremă pentru matematicienii maturi, primită o dată la patru ani, la Congresul Internaţional de Matematică, de doi, trei sau patru matematicieni sub 40 de ani.

Sigur, sunt şi alte premii tari în matematică! Premiul Abel, premiul Wolf, premiul Kyoto sunt, cu siguranţă, şi mai greu de obţinut decât medalia Fields. Dar nu au acelaşi răsunet, aceeaşi vizibilitate. Şi pot fi obţinute abia la final de carieră, nu joacă acelaşi rol de trambulină şi de încurajare. MF străluceşte mai tare.

Nu trebuie să te gândeşti la ea, nu lucrezi pentru ea – asta ar aduce ghinion.

Nici măcar nu e pomenită, evit să-i pronunţ numele. Scriu MF şi destinatarul pricepe.

Anul trecut, am primit premiul Societăţii Europene de Matematică, atribuit o dată la patru ani unui număr de zece tineri cercetători europeni. În ochii multor colegi, ăsta era semnul că încă sunt în cursa pentru MF. Printre punctele mele forte, spectrul foarte întins, mai ales pentru generaţia mea: analiză, geometrie, fizică, ecuaţii cu derivate parţiale… În plus, tânărul minune din Australia, Terence Tao, nu mai e în cursă: a fost deja medaliat la Congresul Internaţional, la 31 de ani abia împliniţi.

Dar ce-am reuşit eu nu e ireproşabil. Teorema de convergenţă condiţională pentru ecuaţia lui Boltzmann, de care sunt atât de mândru, presupune regularitatea; ca să fie perfectă, ar fi trebuit s-o demonstrez. Teoria limitelor Ricci în sens slab

abia începe, iar criteriul nostru general de curbură-dimensiune nu e acceptat de toți. Ampla mea deschidere matematică e bună, dar are şi neajunsuri: probabil că nici un expert nu stăpâneşte ansamblul dosarului meu. În orice caz, ca să am o şansă, şi chiar pentru echilibrul meu personal, trebuie deja să demonstrez o teoremă grea legată de o problemă semnificativă de fizică.

Pragul ăsta de 40 de ani, ce presiune! N-am decât 35… Dar regula a fost întărită la ultimul Congres Internațional, în 2006, la Madrid. De-acum, trebuie să ai sub 40 de ani la 1 ianuarie al anului Congresului. Am înțeles ce însemna asta pentru mine imediat ce-au publicat noua regulă: în 2014 aş fi prea bătrân cu 3 luni; aşadar, MF va fi în 2010 sau niciodată.

Din momentul acela, n-a trecut zi fără ca Medalia să nu se insinueze în mintea mea. Şi de fiecare dată am respins-o. Nu există manevre politice, nu se concurează în mod explicit pentru Medalia Fields şi, oricum, juriul e secret. Nu vorbesc despre asta cu nimeni. Ca să-mi sporesc şansele de a primi Medalia, nu trebuie să mă gândesc la ea. Să nu mă gândesc la MF, să mă gândesc doar la o problemă de matematică, una care să mă acapareze cu trup şi suflet. Iar aici, la IAS, voi fi în locul ideal pentru a mă concentra, pe urmele marilor înaintaşi.

Şi am să locuiesc pe strada Von Neumann!

*

Când s-a declanşat crahul din 1929, familia Bamberger s-a putut considera fericită. Făcuseră avere dintr-un lanț de supermarketuri în New Jersey şi-şi vânduseră afacerea cu şase săptămâni înainte să se prăbuşească totul. Într-o economie în ruină, ei erau bogați, foarte bogați.

Nu foloseşte la nimic să fii bogat dacă nu-ți pui banii la treabă; aşa că au vrut să servească o cauză nobilă, visau să schimbe societatea. S-au gândit la o mare şcoală de tratamente stomatologice, dar au fost convinşi că cea mai eficientă utilizare

a banilor lor ar fi înfiinţarea unui nou institut de ştiinţe teoretice. Teoria nu costă foarte mult, cu ce aveau ei puteau pune bazele celui mai bun institut din lume, unul care să strălucească peste mări şi oceane!

Şi-apoi, în matematică şi în fizica teoretică, deşi specialiştii nu sunt de acord în toate cele, sunt totuşi de acord în privinţa celor care sunt cei mai buni dintre ei. Iar dacă aceşti cei mai buni sunt identificaţi, atunci ar putea fi aduşi!

Aşa că, pentru noul institut Bamberger, aveau să fie aduşi cei mai buni. După ani de negocieri, au acceptat unul după altul. Einstein. Gödel. Weyl. Von Neumann. Şi alţii… Atmosfera devenise insuportabilă în Europa pentru cercetătorii evrei şi pentru prietenii lor, ceea ce a ajutat la deplasarea centrului de greutate al ştiinţei mondiale dinspre Germania către Statele Unite. În 1931, visul lui Bamberger se concretiza: era inaugurat Institute for Advanced Studies, Institutul pentru Studii Avansate, chiar alături de prestigioasa şi aproape bicentenara Universitate Princeton (ea însăşi susţinută de o altă familie de mecenaţi, legendarii Rockefeller). La IAS, cercetătorii permanenţi aveau să primească un salariu mai mult decât confortabil, şi nu aveau să aibă nici o obligaţie didactică.

Institutul a evoluat: azi, în departamentul de ştiinţe ale naturii, nu mai găseşti doar fizică teoretică sub toate formele ei (astrofizică, fizica particulelor, mecanica cuantică, teoria corzilor…), ci şi biologie teoretică. S-au mai adăugat un departament de ştiinţe sociale şi unul de istorie. Toate cu aceeaşi tradiţie de excelenţă.

Matematicienii se perindă prin acest templu al cunoaşterii, îşi povestesc ultimele descoperiri, încearcă să atragă atenţia celor mai mari. Cei care sunt invitaţi să rămână câteva luni sau câţiva ani nu trebuie să aibă decât un singur lucru în minte – acela pentru care sunt plătiţi: să producă cele mai bune teoreme din lume, sub ochii maliţioşi ai lui Einstein, care e prezent peste tot, în bronz, pe hârtie fotografică, în tablouri.

Şi totul e gândit în aşa fel încât matematicienii să nu aibă nici o grijă în afara matematicii. Dacă vii însoţit de familie, copiii îţi vor fi înscrişi la şcoală cu mult timp înainte. O armată de secretare se va ocupa de problemele tale materiale. Locuinţa îţi va fi rezervată la câteva minute de Institut. Cantina excelentă te scuteşte de căutarea unui restaurant, iar pădurea e ideală pentru plimbări. De îndată ce intri în biblioteca de matematică, una ca pe vremuri, o asistentă se aruncă asupra ta ca să te ajute să găseşti cartea pe care o cauţi sau ca să-ţi explice sistemul de fişe pe cât de desuet, pe atât de eficient. Totul pare să-ţi spună: Uite, băieţaş, ai aici tot ce-ţi trebuie, aşa că uită-ţi grijile, gândeşte-te numai la matematică, matematică, matematică.

Dacă treceţi prin Institut în timpul verii, mergeţi la biblioteca de ştiinţe umaniste, de cealaltă parte a lacului faţă de departamentul de matematică – noaptea e pustiu –, şi o să vă simţiţi ca un explorator care descoperă o peşteră a comorilor din alte vremuri, vechi colecţii de hărţi de peste un metru, dicţionare gigantice, enciclopedii uriaşe.

Apoi, ieşind din bibliotecă, opriţi-vă pe banca de-alături; noaptea, e cel mai frumos loc din lume. Dacă aveţi noroc, veţi auzi mugetul cerbilor, veţi vedea luminile fantomatice ale licuricilor, veţi contempla reflexele lunii oglindindu-se în apele negre şi veţi simţi trecând spectrele unora dintre cele mai puternice minţi ale secolului XX, formând un fel de brumă invizibilă deasupra lacului.

Capitolul 10

Princeton, 12 ianuarie 2009

Seara târziu, în apartamentul meu din Princeton, aşezat pe jos, pe mochetă, înconjurat de foi de hârtie scrise, în fața geamului de sticlă enorm prin care, ziua, copiii se uită la veverițele cenuşii. Mă gândesc şi mâzgălesc câte ceva în tăcere.

Alături, în birou, Claire se uită la *Death Note* pe un laptop. Nu există cinematografe în Princeton, aşa că serile trebuie ocupate cu ceva. I-am tot lăudat serialul ăsta de desene animate diabolice… a devenit şi ea dependentă. Şi are prilejul să asculte limba japoneză.

Azi am vorbit la telefon cu Clément. În ultimele zile, am trecut în treapta superioară de viteză. La Princeton, n-am cursuri; iar el, cercetător la CNRS, n-are nici el obligații. Aşa că putem lucra după voie.

Şi-apoi, decalajul orar dintre colaboratori are avantajele lui. Cu un decalaj de şapte ore, putem lucra aproape continuu. Dacă eu trag până la miezul nopții la Princeton, trei ore mai târziu Clément se află în biroul lui de la Paris ca să preia ştafeta.

Ne-am agățat de un anume calcul. E un artificiu destul de drăguț cu care păcălim timpul de existență a soluției, ne-am pus mari speranțe în el. Din partea mea, îmi doresc din toată inima ca ideea lui să joace un rol important (chiar aşa va fi, mult peste ce-mi închipuisem!), dar tot nu reuşesc să cred că ideea asta va fi de-ajuns ca să ne salveze. Ne trebuie o altă estimare.

Un alt artificiu.

*

Date: Mon, 12 Jan 2009 17:07:07 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: bad news

Uite, nu reusesc sa reproduc transferul de regularitate cu estimari la fel de bune ca ale tale (dupa conversia in spatiile cu 3 indici, ceva nu merge acolo). Am reluat calculul tau, si am gasit doua locuri unde nu tine: (a) ultimul indice pe p. 39, l.8 (inainte de "We use here the trivial estimate") mi se pare ca ar trebui sa fie \lambda+2\eta mai degraba decat \lambda+\eta; (b) mi se pare imposibil ca in ipoteza (5.12) cantitatea estimata sa nu depinda de \kappa (limitele \kappa\to 0 si \kappa\to\infty schimba spatiul in intregime).
Concluzie: mi se pare ca avem o problema…
Va urma,
Cedric

Date: Mon, 12 Jan 2009 23:19:27 +0100
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: bad news

O sa ma uit mai atent maine dupa-amiaza. Dar sunt de acord cu punctul (a), sigur mai sunt si alte probleme cu indicii prin alte parti. Cat despre (b), ce credeam ca pot folosi ca sa afirm ca (5.12) nu depinde de \kappa (pentru \kappa intr-un compact), era dependenta slaba in v a campului de scattering $X^{scat}_{s,t}$: cum $\Omega_{s,t}$ e apropiat de identitate pana la un O(t-s), avem $X^{scat}_{s,t}=x+O(t-s)$. Nu rezulta ca toate derivatele in v sunt "strivite" in O(t-s)?
pe curand, clement

Date: Sun, 18 Jan 2009 13:12:44 +0100
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: transfer

Salut Cedric,
Fac referat pentru un survey al lui Jabin despre lemele de medie (cursul lui de la Porto Ercole), asa ca am facut niste calcule sa vad legatura cu ale noastre, si am impresia ca in estimarea liniara transferul de regularitate e legat de lemele de medie, dar exprimat in L^1/L^\infty ceea ce pare neobisnuit. De exemplu, daca incercam sa transferam regularitate de la x catre v fara ca diferenta in plus pentru x sa fie proportionala cu (t-s), suntem limitati la o crestere <1 pentru a avea integrabilitate in timp, ceea ce e coerent cu limita 1/2 in L^2. O alta noutate in calculele astea pare sa fie ca atunci cand cresterea e proportionala cu (t-s) nu mai exista limita 1… De vazut si daca aceasta crestere proportionala cu (t-s) poate fi utila in teoria regularitatii neliniare (intrebarea ta de la inceput)… Tu ce noutati mai ai?
Cu prietenie,
Clement

Capitolul 11

Princeton, 15 ianuarie 2009

Ca în fiecare dimineață, trec prin sala comună ca să-mi fac un ceai. Aici nu mai întâlneşti bonomia lui Einstein, ci trăsăturile tăioase ale lui André Weil, care apare într-un bust în bronz.

Sala comună nu e exuberantă. Are o tablă neagră mare, asta-i de la sine înțeles, ustensile pentru ceai, are table de şah şi vrafuri de reviste consacrate jocului de şah.

Una dintre reviste îmi sare-n ochi, e sărbătorit Bobby Fischer, cel mai mare şahist din toate timpurile, mort acum vreun an. Lovit în plin de paranoia, şi-a sfârşit viața ca un mizantrop incoerent. Dar, dincolo de nebunie, rămân partidele extraordinare de şah ale unui jucător căruia încă nu i s-a găsit egalul.

În matematică, au fost deja mai mulți cu acest gen de destin tragic.

Paul Erdös, mtematicianul rătăcitor, autor a 1500 de articole (record mondial), unul dintre fondatorii teoriei probabiliste a numerelor, hoinărind prin lume în hainele lui zdrențuite, fără casă, fără familie, fără slujbă, numai cu geanta, valiza, maculatorul şi geniul lui.

Grigori Perelman, care şi-a petrecut şapte ani în singurătate ca să pătrundă, în secret, misterele faimoasei conjecturi a lui Poincaré, şi a uimit apoi lumea matematică oferindu-i o soluție neaşteptată despre care se credea că nu e posibilă. Poate pentru a nu strica puritatea acestei soluții a refuzat milionul de dolari oferit de un mecena american şi a demisionat de la institut.

Alexander Grothendieck, legendă vie, care a revoluționat în profunzime matematica prin şcoala de gândire pe care a creat-o, una dintre cele mai abstracte elaborate vreodată. A demisionat de la Institutul de Înalte Studii Ştiințifice şi s-a refugiat într-un sătuc din Pirinei, seducător convertit în eremit, pradă nebuniei şi maniei scrisului.

Kurt Gödel, cel mai mare logician din toate timpurile, care, spre surpriza generală, a demonstrat că nici o teorie matematică nu e completă şi că întotdeauna vor exista enunțuri care nu sunt nici adevărate, nici false. În ultima parte a vieții, mistuit de un complex al persecuției, a sfârşit prin a muri de foame, de teamă să nu fie otrăvit.

Şi John Nash, eroul meu matematic, care în zece ani şi trei teoreme a revoluționat analiza şi geometria, pentru ca apoi să se afunde şi el în paranoia.

Se spune că granița dintre geniu şi nebunie e îngustă. Dar şi unul, şi celălalt sunt concepte rău definite. Şi-apoi, în cazul lui Grothendieck, al lui Gödel sau al lui Nash, se vede limpede că perioadele de nebunie nu coincid cu perioadele de productivitate matematică.

Ce e înnăscut, ce se dobândeşte – altă dezbatere clasică. Fischer, Grothendieck, Erdös, Perelman erau, cu toții, de origine evreiască. Printre ei, Fischer şi Erdös erau, în plus, de origine maghiară. Oricine e familiar cu mediul matematic ştie cât de numeroase sunt talentele evreieşti din acest domeniu, şi nu poate să nu fie uimit de extraordinarul palmares unguresc. Potrivit unei butade la modă în anumite cercuri ştiințifice americane din anii '40, „marțienii există: au o inteligență supraomenească, vorbesc o limbă incomprehensibilă şi pretind că vin dintr-un loc numit Ungaria".

Acestea fiind zise, Nash e american pursânge, fără absolut nimic în ascendența sa pe baza căruia cineva să-i fi putut bănui destinul. Oricum, un destin depinde de atâtea lucruri! Combinație a ideilor, combinație de experiențe şi întâlniri,

combinație genetică – toate participă la minunata şi dramatica loterie a vieții. Nici genele, nici mediul nu pot explica totul, şi e bine că-i aşa.

*

What happens when you gather 200 of the world's most serious scholars, isolate them in a wooden compound, liberate them from all the mundane distractions of university life, and tell them to do their best work? Not much. True, a lot of cutting edge research gets done at the celebrated Institute for Advanced Studies near Princeton. Due to the Institute's remarkable hospitality, there is no better place for an academic to sit and think. Yet the problem, according to many fellows, is that the only thing there is to do at the Institute is sit and think. It would be an understatement to call the IAS an Ivory Tower, for there is no more lofty place. Most world-class academic institutions, even the very serious, have a place where a weary bookworm can get a pint and listen to the jukebox. Not so the IAS. Old hands talk about the salad days of the 40s and 50s when the Institute was party central for Princeton's intellectual elite. John von Neumann invented modern computing, but he is also rumored to have cooked up a collection of mind-numbing cocktails that he liberally distributed at wild fetes. Einstein turnes physics on his head, but he also took the occasional turn at the fiddle. Taking their cues from the ancients, the patriarchs of the Institute apparently believed that men (as they would have said) should be well-rounded, engaging in activities high and low, according to the Golden Mean. But now the Apollonian has so overwhelmed the Dionesian at the Institute that, according to many members, even the idea of having a good time is considered only in abstract terms. Walking around the Institute's ground, you might trip over a Nobel laureate or a Fields medalist. Given the generous support of the Institute, you might even become one. But

you can be pretty certain that you won't have a drink and a laugh with either.

(Extras din articolul „DNE, singurul grup rock care a existat vreodată la Institute for Advanced Studies", de Marshall Poe, Encyclopedia of Memory [DNE=Do Not Erase].)

Capitolul 12

Princeton, 17 ianuarie 2009

Sâmbătă seara, cină în familie.

Ziua a fost consacrată în întregime unei excursii organizate de Institut pentru oaspeții săi. Excursie la sfânta sfintelor pentru toți cei pasionați de istoria Vieții: Muzeul de Istorie Naturală din New York.

Îmi amintesc foarte bine prima mea vizită la acest muzeu, acum exact zece ani. Ce emoție să văd unele dintre cele mai celebre fosile din lume, fosilele reproduse în toate ghidurile şi dicționarele de dinozauri pe care le devoram în adolescență!

Astăzi, m-am întors cu zece ani în urmă şi mi-am lăsat deoparte grijile matematice. Dar acum, la masă, nu le mai pot uita.

Uşor nedumerită, Claire îmi observă chipul schimonosit de ticuri.

Demonstrația amortizării Landau încă nu stă în picioare. Nu-mi dă pace.

Cum Dumnezeu să facem ca să obținem o descreştere prin transfer de regularitate în poziție, după ce s-au compus vitezele… compunerea asta introduce o dependență de viteze, dar n-am chef de ele, de viteze!

Ce balamuc!

Nu fac conversație, în cel mai bun caz scot câteva cuvinte, în cel mai rău, mormăi.

— Azi a fost frig, ne puteam da cu sania… Ai văzut culoarea steagului de pe lac, azi?

— Hm. Roşu. Aşa cred.

Steag roşu: chiar dacă lacul e îngheţat, interdicţie de plimbare, prea periculos. Steag alb: mergeţi, băieţi!, gheaţa ţine, săriţi, râdeţi, dansaţi pe gheaţă dacă aveţi chef.

Şi când te gândeşti că acceptasem să-mi prezint rezultatele la seminarul de fizică statistică de la Rutgers pe 15 ianuarie! *Cum* am putut să accept, când n-aveam demonstraţia completă? Ce-am să le povestesc?

Şi totuşi, când am ajuns aici, chiar la începutul lui ianuarie, eram atât de sigur că pot termina proiectul în fix două săptămâni! Noroc că expunerea asta a fost amânată cu încă două săptămâni. Dar chiar şi cu amânarea asta, am să fiu gata? Termenul se apropie! Dar cum să-mi fi închipuit că va fi atât de greu, în viaţa mea n-am văzut aşa ceva!

Vitezele-s problema, vitezele! Când nu aveam dependenţă de viteze, puteam separa variabilele după transformata Fourier, dar cu viteze – cum naiba? Iar de viteze nu scap, în ecuaţia neliniară, n-am cum să nu le iau în seamă!

— E-n regulă? Totuşi, nu e cazul să te-mbolnăveşti! Ia-o-ncet, destinde-te.

— Îhî.

— Parcă eşti picat din lună.

— Uite ce, am o treabă de făcut, se numeşte amortizare Landau neliniară.

— Nu trebuia să lucrezi la ecuaţia lui Boltzmann, nu ăsta era marele tău proiect, nu ţi se pare că pierzi din vedere esenţialul?

— Mi se fâlfâie. Acum e amortizarea Landau.

Dar amortizarea Landau continuă să facă pe frumoasa inaccesibilă şi rece. Nu sunt în stare s-o abordez.

...E, totuşi, calculul acela micuţ pe care l-am făcut când ne-ntorceam de la muzeu, e dătător de speranţe, nu? Dar ce complicat e! Am mai pus doi parametri la normă. Normele noastre depindeau de cinci indici, era deja un record mondial, acum o să fie şapte!! Dar de ce nu, când cei doi indici sunt

aplicați pe o funcție care nu depinde de viteză, se revine la norma dinainte, e coerent… Trebuie să verific bine calculul ăsta. Dar dacă mă uit prea mult la el acum, o să-mi pară fals, mai bine las pe mâine. Paştele mă-sii, trebuie să refac totul cu blestematele astea de norme cu şapte indici.

Am un aer aşa de mohorât, că lui Claire i se face milă de mine, simte că trebuie să spună ceva ca să mă liniştească.

— Hai, lasă, mâine-i duminică, dacă vrei, poți să stai toată ziua la birou, mă ocup eu de plozi.

În momentul ăsta, nimic pe lume nu mi-ar fi făcut mai multă plăcere.

*

```
Date: Sun, 18 Jan 2009 10:28:01 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr
Subject: Re: transfer

On 01/18/09, 13h12, Clement Mouhot wrote:
> Tu ce vesti ai?

Inaintez… Intai am oscilat, apoi m-am convins ca
procedand ca tine nu castigam destul timp. Am gasit
o alta metoda care castiga tocmai pe variabila timp,
pare sa mearga bine, dar are un defect, face sa
apara spatii un pic mai complicate, cu 2 indici in
plus :-) Pe de alta parte, toate estimarile par sa
functioneze si pentru familia asta noua, dar mai
trebuie sa verific bine. In orice caz, sunt chestii
ultrafine si cred ca asta-i miezul problemei (sau
unul dintre ele). Daca totul merge bine, diseara
iti trimit o versiune noua, cu gauri de umplut, ar
trebui sa putem reincepe sa tragem in paralel.
Numai bine
Cedric
```

Date: Sun, 18 Jan 2009 17:28:12 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr
Subject: Re: transfer

Uite noua forma a fisierului. Ca sa stea totul in picioare (inca nu vorbesc despre schema lui Newton), trebuie (i) sa verificam ca normele “bihibride‟ pe care le-am introdus la sfarsitul sectiunii 4 satisfac aceleasi proprietati ca si normele hibride “simple‟ si ca, in consecinta, avem estimari similare pentru caracteristicile acestor norme (!) (ii) sa gasim un mijloc de a combina cele doua efecte distincte descrise in noua sectiune 5; (iii) sa punem toate astea la sfarsitul sectiunii 7 si sa completam pentru a pune estimarea pentru densitatea completa; (iv) sa verificam tot! Altfel spus, avem o paine de mancat. Deocamdata, as sugera sa verifici ce-am scris si sa-mi spui daca gasesti ceva suspect. O sa-ti spun daca mai incolo vad chestii la care putem trage in paralel…

Inca cateva precizari:
Despre estimarile tale pentru transferul de regularitate: cred ca aveau bug-uri, rezultatul era prea tare, n-am reusit sa le reproduc in normele obisnuite; in schimb am folosit strategia ta ca sa fac un transfer in sectiunea 5. Dar cand incerci s-o folosesti la timp mare (t\to\infty, \tau ramanand mic) crapa, asa mi se pare, exponentii autorizati nu dau voie integralei sa convearga in timp. Am fabricat (nu ma intreba cum) o reteta ca sa castigam prin integrarea in timp, dar de data asta fara castig de regularitate. Ramane sa le combinam.
Va urma, numai bine
Cedric

Date: Mon, 19 Jan 2009 00:50:44 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

To: clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr
Subject: Re: transfer

Am recitit fisierul si am facut un pic de debug, asa ca asta-i versiunea de incredere. Pentru perioada imediat urmatoare, propun urmatoarea impartire a sarcinilor:

— treaba ta e sa faci sa mearga Propozitia 4.17 si Teorema 6.3, e cam bestial, dar are avantajul ca te obliga sa recitesti la virgula toate estimarile mele din sectiunile 4 si 6 :-) ceea ce nu e chiar un lux, pentru ca suntem la mana unei erori de calcul asupra conditiilor pe care trebuie sa le verifice exponentii. Deocamdata, in aceste doua locuri am pus enunturi "nada" cu estimari scrise un pic la nimereala, s-ar putea sa fie cele bune, dar se poate si ca realitatea sa fie mai complicata. Nu e cazul sa redactezi demonstratiile, dar trebuie sa fim siguri de marginile pe care le obtinem, de ele depinde tot restul.

— in timpul asta eu ma angajez sa termin sectiunile 5 si 7 (modulo ce-o sa-mi dai despre Teorema 6.3).

— in plus, o sa discut maine cu Tremaine despre partea fizica a introducerii.

— daca reusesti sa redactezi remarca ta de mai jos, o poti incorpora in introducerea sectiunii 5 unde am mentionat deja legatura cu lemele de medie. (Atentie, cum lucram in clasa analitica, nu e absolut convingator ca asta trebuie sa fie un fenomen L^1/L^\infty??)

Daca ai timp sa te apuci imediat de astea si daca totul merge bine, am putea sa ne fixam ca obiectiv sa lichidam totul in 2-3 zile si nu ne-ar mai ramane decat sa introducem cum trebuie Newton/Nash-Moser. (Dar cred ca prioritatea e sa

```
corectam enunturile lui 4.17 si 6.3 ca sa fim siguri
ca nu cladim pe nisip.)

Numai bine,
Cedric
```

```
Date: Mon, 19 Jan 2009 13:42:27 +0100
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: transfer

Salut, Cedric
chestia asta devine din ce in ce mai monstruoasa;)!!
```

*

Extrase din fişierul global-3 (18 ianuarie 2009)

4.7 Byhibrid norms

We shall be led to use the following more complicated norms:

Definition 4.15. We define the space $\mathcal{Z}^{(\lambda,\lambda'),\mu;p}_{(\tau,\tau')}$ by:

$$\|f\|_{\mathcal{Z}^{(\lambda,\lambda'),\mu;p}_{(\tau,\tau')}} = \sum_n \sum_m \frac{1}{n!\,(n-m)!}$$

$$\times \Big\| \big(\lambda(\nabla_v + 2i\pi\tau k)\big)^m \, \big(\lambda'(\nabla_v + 2i\pi\tau' k)\big)^{n-m} \widehat{g}(k,v) \Big\|_{L^p(dv)}.$$

(…)

After trial and error, the best we could do was to recognize this decay in the "bi-hybrid" norms described in Subsection 4.7:

Proposition 5.6 (regularity-to-decay estimate in hybrid spaces).

Let $f = f_t(x, v)$, $g = g_t(x, v)$, *and*

$$\sigma(t,x) = \int_0^t \int f_\tau(x - v(t-\tau), v)\, g_\tau(x - v(t-\tau), v)\, dv\, d\tau.$$

Then

$$\|\sigma(t)\|_{\mathcal{F}^{\lambda t+\mu}} \leq \left(\frac{C}{\overline{\lambda} - \lambda}\right) \sup_{0\leq\tau\leq t} \|f_\tau\|_{\mathcal{Z}_\tau^{\overline{\lambda},\mu;1}} \sup_{0\leq\tau\leq t} \|g_\tau\|_{\mathcal{Z}_{(\tau,0)}^{(\lambda,\overline{\lambda}-\lambda),\mu}}.$$

Capitolul 13

Princeton, 21 ianuarie 2009

Artificiul găsit în seara vizitei la muzeu mi-a permis să pornesc din nou. Iar azi, sunt plin de speranță amestecată cu teamă. În fața unei dificultăți majore, am făcut câteva calcule explicite şi am sfârşit prin a înțelege cum să stăpânesc un termen prea mare. În acelaşi timp, mă cuprinde amețeala în fața complexității a ceea ce se află în fața mea.

Te pomeneşti că vajnica ecuație a lui Vlasov, pe care credeam că încep s-o cunosc, funcționează în salturi! Pe hârtie, calculele arată că există anumiți timpi în care reacționează prea repede față de stimuli. N-am auzit niciodată de ceva asemănător, nu apare în articolele sau cărțile pe care le-am citit. Oricum, înaintăm.

*

```
Date: Wed, 21 Jan 2009 23:44:49 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: !!

Asta-i, dupa ore de jalnica bajbaiala, sunt convins
ca am identificat motivul care sterge O(t)-ul de
care ma plangeam azi la telefon. E MONSTRUOS!
Se pare ca nu e din pricina estimarilor biliniare,
nici a schemei lui Moser, e la nivelul "lemei lui
Gronwall" in care estimam \rho in functie de el
insusi… poanta e ca avem o chestie de felul
u(t) \leq source + \int_0^t a(s,t)u(s)ds
```

unde u(t) e o margine pentru \|\rho(t)\|. Daca \int_0^t a(s,t)u(s)ds=O(1) e in regula. Problema e ca \int_0^t a(s,t)u(s)ds pare sa poata fi egal cu O(t) (adevarul e ca nu avem nici o obstructie, am luat cazurile cele mai perfecte posibil si se poate intampla intotdeauna). Dar cand se intampla asa ceva, e intr-un punct strict interior din [0,t], cam catre mijloc (asta corespunde cazului in care avem k si \ell astfel incat 0=(k+\ell)/2); sau la 2/3 daca avem 0=(2/3)k+\ell/3 etc. Dar atunci ecuatia recursiva in u(s) arata ca

u(t)\leq source + epsilon t u(t/2)

iar solutiile chestiei asteia nu sunt marginite a priori, ci au crestere lenta! (subexponentiala) Dar cum norma in \rho contine descrestere exponentiala, in final se obtine exact aceasta descrestere………

Pare un pic monstruos de aranjat toata chestia (in mare, trebuie repertoriate rezonante). E treaba mea de maine. In orice caz, asta nu pune in discutie programul de verificare a normelor hibride.
Numai bine
Cedric

Date: Wed 21 Jan 2009 09:25:21 +0100
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Re: !!

Chiar ca arata monstruos! Cat despre mine, m-am uitat la partea Nash-Moser si sunt si eu de acord ca e putin probabil sa putem absorbi in ea factorul t… Dimpotriva, daca inteleg bine argumentul marginii lui u(t) trebuie neaparat ca punctul s in care a(s,t) e mare sa ramana in mod uniform la o distanta strict pozitiva de t… Alta chestie e ca am

avea in felul asta o margine subexponentiala in timp pentru rezolvarea problemei neliniare. Si ca s-o topim in norma in \rho ar trebui sa acceptam sa pierdem un pic pe indicele ei, ceea ce cred ca trebuie absolut evitat in partea Nash-Moser…?
numai bine, clement

Capitolul 14

Princeton, 28 ianuarie 2009

Beznă! Am nevoie de întuneric, să fiu singur în beznă. Camera copiilor, obloanele trase, e foarte bine. Regularizarea. Schema lui Newton. Constantele exponențiale. Toate mi se bulucesc în minte.

Imediat ce-am adus copiii acasă, m-am refugiat în camera lor ca să continui să-mi pritocesc gândurile. Mâine am expunerea de la Rutgers, și demonstrațiile tot nu stau în picioare. Am nevoie să merg singur ca să pot gândi. Și asta *urgent*!

Claire mi-a mai răbdat și altele fără să crâcnească; totuși, să mă știe învârtindu-mă, singur, într-o cameră în beznă, în timp ce ea pregătește cina, e un pic prea mult.

— E totuși foarte ciudat!!

N-am răspuns, toate canalele mele mentale erau saturate cu gânduri matematice și cu sentimentul urgenței. Am fost totuși să mănânc împreună cu ceilalți, apoi am lucrat toată seara. Un anume calcul, de care eram foarte sigur, nu mai merge, probabil că m-am păcălit. Grav sau nu prea grav?

Mă opresc pe la două dimineața, am impresia că, în fine, totul merge bine.

*

Date: Thu, 29 Jan 2009 02:00:55 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: global-10

!!!! Cred ca acum am prins firele lipsa.
— Mai intai, am gasit in sfarsit (daca n-am gresit) cum sa facem ca sa pierdem un epsilon oricat de mic vrem (chiar daca pierdem o constanta foarte mare, de tipul exponentialei sau exponentiala la patrat in 1/epsilon). Asta iese dintr-un calcul absolut diabolic pe care deocamdata doar l-am schitat la sfarsitul sectiunii 6. Pare complet miraculos dar cade exact cum trebuie, pare convingator.
— Apoi, cred ca am identificat si locurile unde pierdem in caracteristici si scattering. Vom avea de refacut toate calculele din sectiunea asta, chestie care se anunta destul de atroce… Am pus cateva comentarii intr-o subsectiune la sfarsitul acestei sectiuni.
Cu asta, cred ca acum avem toate elementele ca sa alimentam Nash-Moser. Maine, joi, nu-s aici. Uite planul pe care ti-l propun pentru mai departe: o sa refac eu sectiunea 6 cu cresterea subexponentiala, in timpul asta tu pornesti estimarile de scattering care nu-s triste. Ne fixam ca obiectiv sa avem redactat totul la inceputul saptamanii viitoare, cu exceptia ultimei sectiuni. Ce zici?

Numai bine
Cedric

Capitolul 15

New Brunswick, 29 ianuarie 2009

Azi – ziua de care-mi era atât de frică. Sunt invitat la seminarul de fizică statistică de la Universitatea Rutgers, cam la treizeci de kilometri de Princeton. Mă duc cu maşina Eric Carlen şi Joel Lebowitz – amândoi locuiesc la Princeton şi lucrează la Rutgers.

E a doua mea vizită la Rutgers; prima dată, am fost pentru o zi în memoria lui Kruskal, inventatorul solitonilor, o minte uriaşă. Îmi sunt încă proaspete în minte anecdotele povestite de participanţi – Kruskal discutând în lift cu doi colaboratori şi lăsându-se atât de prins de conversaţie încât au rămas în lift douăzeci de minute, în timp ce alţii intrau şi ieşeau din liftul care tot urca şi cobora.

Dar azi e mai puţin plăcut! Mă aflu sub tensiune!

De obicei, într-un expozeu ştiinţific (un „seminar“) se povesteşte ceva ce a fost verificat şi repetat în detaliu. Asta am făcut întotdeauna. Dar azi nu-i aşa: ceea ce voi prezenta nu e pigulit până la capăt, nici demonstraţia nu-i completă.

Sigur, aseară m-am convins că totul ţine, că mai e doar de scris finalul. Dar azi-dimineaţă iar m-au cuprins îndoielile. Pentru a se risipi apoi din nou. Încă mă gândesc la ele în maşină.

În timp ce-mi ţin prelegerea, sunt sincer convins că totul e-n regulă. Autosugestie? Nu dau prea multe detalii matematice, dar insist pe semnificaţia problemei şi pe interpretarea ei fizică. Le înfăţişez faimoasa normă, a cărei complexitate smulge murmurul

publicului. Şi asta în condițiile în care m-am mulțumit să prezint versiunea cu cinci indici, nu pe cea cu şapte…

După expunere, mergem în zece la prânz, discuțiile sunt animate. Adineauri, în public era şi un tip înalt, dezghețat, cu ochi sclipitori, foarte vesel: Michael Kiessling; acum îmi povesteşte cu entuziasm comunicativ despre iubirile sale de tinerețe pentru fizica plasmei, ecrantaj, ecoul de plasmă, teoria cvasiliniară…



Michael Kiessling

Ecoul de plasmă îmi trezeşte imediat atenția. Ce experiență frumoasă! Se prepară o plasmă, adică un gaz în care s-au separat electronii de nuclee; e preparată în stare de repaus şi, la începutul experienței, repausul este deranjat aplicând un scurt câmp electric, un „impuls“. Apoi se aşteaptă până când curentul astfel creat se estompează, după care se aplică un al doilea câmp. Se aşteaptă ca şi acesta să se estompeze, şi-atunci se iveşte miracolul: dacă cele două impulsuri sunt bine alese, se observă un răspuns spontan, la un moment precis, răspuns care se numeşte *ecou*…

Straniu, nu-i aşa? Scoți un strigăt (electric) în plasmă, apoi un al doilea strigăt (la o înălțime diferită), iar un pic mai târziu plasma răspunde (la o înălțime diferită de cele două!).

Toate astea-mi aduc aminte de calculele făcute acum câteva zile: o rezonanță în timp… plasma mea care reacționa la anumite momente foarte particulare… credeam că mi-am pierdut capul, dar dacă-i acelaşi fenomen al ecourilor, bine-cunoscut în fizica plasmei?

Las asta pe mai târziu. Deocamdată voi sta de vorbă cu profesorii de aici. Aşadar, cine mai e în echipă, pe cine ați mai recrutat? Da, sigur, sunt cutare şi cutare, e bine…

Unul dintre nume mă face să sar de pe scaun.

— Cum, Vladimir Scheffer e aici?

— Da, sigur, de mult. De ce, îi ştii lucrările?

— Evident, am făcut un seminar Bourbaki despre teorema lui celebră de existență a soluțiilor paradoxale ale ecuației lui Euler… Trebuie să-l întâlnesc!

— Păi, nici noi nu-l prea vedem, n-am mai vorbit de mult cu el. Încerc să ți-l găsesc după prânz.

Joel a reuşit să-l contacteze, şi Sheffer vine cu noi în biroul lui Joel.

Nu-mi iese din minte această întrevedere.

Sheffer a început prin a se scuza îndelung pentru că nu putuse să ajungă mai devreme, ne-a vorbit despre jobul lui care consta în a înăbuşi în faşă anumite amenințări juridice la adresa universității – din partea unor studenți nemulțumiți?

După care am discutat în doi matematică, într-o cămăruță, în fața unei table.

— Am făcut un seminar Bourbaki despre lucrările dumneavoastră, v-am printat textul! E în franceză, dar poate că vă e de folos. Explic cu detalii cum teorema dumneavoastră de existență a soluțiilor paradoxale a fost ameliorată şi simplificată de Camillo de Lellis şi László Székelyhidi.

— Ah, foarte interesant, mulțumesc.

— Aş fi vrut să înțeleg cum v-a venit ideea, cum Dumnezeu v-a venit ideea să construiți soluțiile acelea incredibile?

— Vă explic, e foarte simplu. În teză, arătasem că există obiecte imposibile, lucruri care n-ar trebui să existe în lumea noastră. Uitați care-i metoda.

Desenează câteva cocoașe pe tablă și un soi de stea cu patru ramuri. Recunosc figura.

— Da, o știu, e configurația T_4 a lui Tartar!



— A, da? Se poate, habar n-am, oricum făcusem asta ca să construiesc soluții imposibile ale unor ecuații eliptice. Și m-am prins că era o rețetă generală.

— Da, o știu și pe-asta, e integrarea convexă a lui Gromov!

— A, da? Nu, nu cred, ce-am făcut eu e mult mai simplu, construcția merge pur și simplu pentru că suntem în acoperirea convexă și de fiecare dată putem exprima soluția învecinată ca o combinație convexă și-apoi…

În ce-mi explică el, recunosc toate ingredientele acelei teorii numite integrare convexă. Tipul ăsta a regăsit totul de unul singur, fără să aibă habar ce-au făcut alții? Unde a trăit, pe Marte?

— Și atunci, mecanica fluidelor?

— A, da! Așa, într-o zi, asistasem la o expunere a lui Mandelbrot și mi-am zis: mi-ar plăcea să fac și eu chestii de-astea; și m-am apucat să studiez ecuația lui Euler din punct de vedere

fractal şi m-am prins că puteam reface acelaşi gen de chestii ca în teză. Dar e complicat.

Ascult cu atenție maximă. Dar, după două, trei fraze generale, se întrerupe brusc.

— Acum, îmi pare rău, trebuie să plec acasă, folosesc transportul în comun şi zilele astea, cu zăpada, se alunecă uşor şi-mi pierd repede echilibrul, am un drum destul de lung de făcut şi…

Sfârşitul întrevederii e consacrat evocării tuturor motivelor pentru care trebuie să ne despărțim. Discuția matematică a durat cam cinci minute, timp în care n-am aflat nimic. Şi când mă gândesc că în fața mea era omul care stă la originea teoremei celei mai surprinzătoare din toată mecanica fluidelor! Demonstrația vie că poți fi o minte sclipitoare şi să comunici jalnic.

Înapoi la Joel, povestesc întrevederea şi regret că n-a durat mai mult de cinci minute.

— Păi, ştii, Cédric, cinci minute cu Vlad – cam tot atât am putut discuta şi eu cu el în ultimii cinci ani.

E momentul să pun deoparte această întrevedere care-mi va rămâne gravată în memorie… mă-ntorc la treburile mele cu amortizarea Landau.

Pe drumul de întoarcere revin şi îndoielile.

Dacă mă gândesc bine, demonstrația n-o să meargă.

Seminarul de la Rutgers marchează un moment-cheie în căutările mele. Să anunți rezultate care nu sunt încă demonstrate e o greşeală gravă, o ruptură a contractului de încredere care leagă oratorul de public. Pentru ca greşeala să nu fie enormă, sunt cu spatele la zid, trebuie cu orice preț să demonstrez ce-am anunțat.

Se zice că John Nash, eroul meu matematic, obişnuia să se pună sub o presiune incredibilă anunțând rezultate pe care încă nu le demonstrase. În orice caz, aşa a făcut cu teorema de scufundare izometrică.

După seminarul de la Rutgers, simt şi eu ceva din presiunea asta. Sentimentul ăsta de urgenţă n-o să mă mai părăsească în lunile următoare. Dacă nu completez demonstraţia asta, sunt dezonorat!!

*

Închipuiţi-vă că vă plimbaţi prin pădure într-o după-amiază liniştită de vară, vă opriţi lîngă un lac, totul e calm, nici o adiere de vânt.

Dintr-odată, suprafaţa apei e prinsă de convulsii, se-agită în vârtejuri formidabile.

Şi-apoi, după doar un minut, totul s-a domolit din nou. Iarăşi nici o adiere de vânt, nici un peşte în lac. Ce s-a întâmplat?

Paradoxul Scheffer-Schnirelman, cu siguranţă rezultatul cel mai surprinzător din toată mecanica fluidelor, arată că o asemenea monstruozitate e posibilă, cel puţin în lumea matematică.

Nu se bazează pe vreun model exotic, pe probabilităţi cuantice, energie întunecată sau mai ştiu eu ce. Se sprijină pe ecuaţia lui Euler incompresibilă, mama tuturor ecuaţiilor cu derivate parţiale, modelul acceptat de toţi, matematicieni şi fizicieni deopotrivă, pentru descrierea fluidului perfect incompresibil, fără frecări interne.

Sunt peste 250 de ani de când s-a născut ecuaţia lui Euler şi tot nu i-au fost pătrunse toate misterele. Mai rău: ecuaţia lui Euler e considerată una dintre cele mai înşelătoare din lume. Când Institutul Clay a scos la concurs şapte probleme de matematică, pentru un premiu de un milion de dolari fiecare, a avut grijă să includă regularitatea soluţiilor lui Navier-Stokes, dar a evitat, precaut, ecuaţia lui Euler, şi mai monstruoasă.

Şi totuşi, la prima vedere, ecuaţia lui Euler pare aşa de simplă, aşa de inocentă – îngerul păzitor al mecanicii fluidelor. Nici n-ai nevoie să modelezi variaţiile de densitate ori

să înțelegi misterioasa vâscozitate, e de-ajuns să scrii legile de conservare: conservarea masei, conservarea impulsului, conservarea energiei.

Şi iată că în 1993 Scheffer arată că ecuația lui Euler în plan permite o creație spontană de energie! Să creezi energie din nimic! Niciodată nu s-au văzut fluide care să nască în natură asemenea monstruozități! E clar că ecuația lui Euler ne mai rezervă încă surprize de proporții.

Demonstrația lui Scheffer era un tur de forță de virtuozitate matematică, era pe cât de obscură pe atât de dificilă. Nu cred că, în afară de autorul ei, a mai citit-o cineva în detaliu şi sunt sigur că nimeni n-ar fi în stare s-o reproducă.

În 1997, matematicianul rus Alexander Schnirelman, faimos pentru originalitatea lui, producea o nouă demonstrație pentru acest rezultat surprinzător. Şi, puțin mai târziu, propunea impunerea unui criteriu ecuației lui Euler, unul realist din punct de vedere fizic, care să interzică comportamentele patologice.

Nici vorbă! Acum câțiva ani, doi străluciți tineri matematicieni, italianul De Lellis şi ungurul Székelyhidi, demonstrau o teoremă generală, încă şi mai şocantă, şi, printre altele, arătau de ce criteriul lui Schnirelman nu putea rezolva paradoxul. În plus, folosind tehnici de integrare convexă, propuneau o metodă nouă pentru generarea acelor soluții monstruoase, un procedeu limpede care se înscria pe o cale explorată deja de numeroşi cercetători: Vladimir Šverák, Stefan Müller, Berndt Kirhheim… Şi-uite-aşa, cu De Lellis şi Székelyhidi descoperim că ştim şi mai puțin decât credeam despre ecuația lui Euler.

Şi asta nu era totul.

*

Extras din seminarul Bourbaki ținut de mine în 2008

Teoremă (Scheffer 1993, Schnirelman, 1997). *Există o soluție slabă nenulă a ecuației lui Euler incompresibile în dimensiune 2,*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v \otimes v) + \nabla p = f, \qquad \nabla \cdot v = 0,$$

fără forsaj $(f \equiv 0)$*, cu suport compact în spațiul-timp.*

Teoremă (De Lellis şi Székelyhidi 2007, 2008). *Fie* Ω *un deschis din* $\mathbb{R}^n$*,* $T > 0$*, şi e o funcție uniform continuă* $\Omega\times]0,T[\to]0,+\infty[$ *, cu e* $\in L^\infty(]0,T[;L^1(\Omega))$*. Atunci, pentru orice η > 0 , există o soluție slabă (v, p) a ecuației lui Euler fără forsaj (*$f \equiv 0$*), astfel încât*

(i) $v \in C(\mathbb{R}; L^2_w(\mathbb{R}^n))^n$ *;*

(ii) $v(x,t) = 0$ *dacă* $(x,t) \notin \Omega\times]0,T[$ *; în particular* $v(\,\cdot\,,0) = v(\,\cdot\,,T) \equiv 0$*;*

(iii) $\dfrac{|v(x,t)|^2}{2} = -\dfrac{n}{2}\,p(x,t) = \overline{e}(x,t)$ *pentru orice* $t \in]0,T[$ *şi pentru aproape orice x* ∈ Ω*;*

(iv) $\sup_{0\le t\le T} \|v(\,\cdot\,,t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)} \le \eta$*.*

În plus,

(v) $(v,p) = \lim_{k\to\infty} (v_k, p_k)$ *în* $L^2(dx\,dt)$*,*
unde fiecare (v_k, p_k) *e o pereche de funcții* C^∞ *cu suport compact, soluție clasică a ecuației lui Euler cu un forsaj* $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ *bine ales,* $f_k \longrightarrow 0$ *în sensul distribuțiilor.*

Capitolul 16

Princeton, 25 februarie 2009

Liniştită mai e viaţa la Princeton! Pădurea, veveriţele cenuşii, lacul, bicicleta.

Şi bucătăria bună! Ieri ne-au dat un file de peşte-spadă la grătar, fraged şi bine asezonat, o supă cremă de dovleac ca la mama acasă, la desert – cremă de ciocolată cu mure şi frişcă…

Abia îţi revii după masa de prânz, că s-a şi făcut ora trei: momentul ceaiului în venerabilul Fuld Hall, la intrarea în IAS, plus degustare de prăjiturele de casă – altele în fiecare zi. Mă omor mai ales după madlene, nu sunt cu nimic mai prejos decât cele pe care le pregăteam pentru vecinii şi vecinele de la internat acum cincisprezece ani.

E drept că stau slab cu pâinea, imposibil de găsit la Princeton o baghetă crocantă; dar lacuna cea mai flagrantă la nivelul produselor de primă necesitate, cea din pricina căreia suferă toată familia, e calitatea jalnică a brânzeturilor! Unde-s Comté-ul cu aromă de fructe, brânza de capră din Rove, Échourgnac-ul parfumat, Brillat-Savarin-urile cremoase? Unde să găseşti aici fragedele Navette şi picantele Olivia provensale, indestructibilele Mimolete de Lille?

Luna asta am fost pentru scurt timp pe Coasta de Vest, la Berkeley, pentru o vizită fulger la Mathematical Sciences Research Institute – prescurtat MSRI – liderul mondial al institutelor care organizează întâlniri între matematicieni. Eram emoţionat să revăd oraşul acesta în care locuisem cinci luni în 2004!

Şi, bineînţeles, n-am ratat o escapadă la Cheeseboard, locul meu preferat din Berkeley, o cooperativă care produce brânză pe principii socialiste care se potrivesc bine cu legenda locală şi unde poţi găsi o selecţie de brânzeturi care fac de ruşine mulţi producători francezi.

La Cheeseboard mi-am făcut plinul, am găsit şi Rove, ştiam că puştii o să se arunce hulpavi pe ea. Le-am mărturisit vânzătorilor cât sufăr de lipsa brânzeturilor în New Jersey; m-au îndemnat stăruitor să fac o vizită la Murrays, la New York. Fie!

În Franţa, echivalentul lui Mathematical Sciences Research Institute este Institutul Henri Poincaré, IHP pentru apropiaţi, fondat în 1928 mulţumită a doi mecena, Rockefeller şi Rothschild. Sunt deja două luni de când consiliul de administraţie al IHP m-a ridicat la rangul de director al acestui institut – în unanimitate, mi s-a spus. Dar încă n-am acceptat, am pus o serie de condiţii şi ca să cântăresc bine – asta cere timp, mult timp.

Prima oară mi-au vorbit despre acest post de director acum patru luni. După ce-a trecut momentul de surpriză, mi-am zis că ar fi o experienţă interesantă şi-am acceptat să candidez. Nu le-am spus nimic colegilor de la ENS Lyon, de teamă să nu-i supăr… De ce să accept un post de director de institut după ce-am refuzat unul de director de laborator? De ce să plec la Paris, când m-am dezvoltat la Lyon? Şi-apoi, în zilele noastre, cine-şi doreşte să fie directorul unui laborator ştiinţific, copleşit de sarcini administrative, cocoşat de regulile pe an ce trece mai constrângătoare?

Ce naivitate să cred că e posibil să nu afle nimeni de candidatura mea! Nu în Franţa… Colegii lyonezi au aflat imediat şi nu le venea să creadă. Era atât de ilogic, un cercetător de vârsta mea gândindu-se la un post despre care se ştia că e foarte dificil, aşa încât şi-au spus că le ascund ceva, că în spatele candidaturii se afla vreun secret personal.

Nici un secret, nu, doar o dorinţă sinceră de a accepta provocarea. Dar numai în condiţii bune! Or, veştile nu sunt prea

încurajatoare, în Franța, discuțiile par să se fi împotmolit… Așadar: debarcare la Paris, ori întoarcere la Lyon?

Poate că nici una, nici alta. Cu sau fără brânză, viața de-aici e foarte plăcută şi mi-au propus să mai stau un an la Princeton, chiar mai mult, dacă mă simt bine, în condiții financiare şi materiale excelente. În plus, Claire şi-a reluat munca în cercetare, are mare succes la cursurile doctorale de ştiințe ale Pământului de la Universitatea Princeton, unde s-a integrat într-o echipă ce lucrează la o nouă descoperire extraordinară – ar putea fi vorba despre cele mai vechi fosile de animal cunoscute! Directorul echipei o roagă să se lanseze într-un stagiu postdoctoral. În orice caz, venind cu mine la Princeton, şi-a pierdut postul de profesor de liceu din Lyon şi-acum e prea târziu ca să mai participe la viitoarea repartizare a profesorilor: toate astea nu-i prea dau ghes să se întoarcă. Pentru ea, a rămâne aici ar fi cu siguranță mai simplu şi i-ar aduce mai multe satisfacții.

În condițiile astea, e greu de rezistat sirenelor princetoniene. Sigur, nu se pune problema să mă instalez definitiv într-o țară atât de înapoiată în privința calității pâinii… dar câțiva ani, de ce nu? La urma urmei, treaba lor dacă nu-s în stare să-mi facă o propunere bună la Paris!

Toate astea se învârtesc şi se amestecă în capul meu de câteva săptămâni deja, şi exact în noaptea asta m-am hotărât să trimit un e-mail în Franța ca să declin oferta de la IHP.

Dimineața însă, când mi-am deschis poşta electronică, lovitură de teatru: gata, toate condițiile mi-au fost acceptate! OK pentru completarea de salariu, OK pentru reducerea normei didactice, OK pentru prelungirea bursei personale. Toate astea par rutină în Statele Unite, dar pentru Franța e un *deal* extraordinar. Lângă mine, Claire citeşte atentă propunerea.

— Dacă le fac pe toate cum trebuie, eşti obligat să te-ntorci.

A dat glas gândului meu. Mă voi întoarce în Franța la sfârşitul lui iunie; ne vom lua la revedere de la Princeton!

Va trebui să-i anunț pe noii mei colegi americani că nu voi rămâne cu ei. Unii se vor bucura pentru mine (baftă, Cédric, va fi pasionant!), alții se vor arăta îngrijorați (te-ai gândit bine, Cédric?, să conduci un asemenea institut – gata cu cercetarea ta), iar alții vor fi îngrozitor de vexați (ca acel celebrisim cercetător de la Princeton care nu va mai vorbi cu mine timp de trei luni). Relațiile mele diplomatice vor deveni şi mai complicate, atât în Statele Unite, cât şi în Franța.

În toiul confuziei, o certitudine: cel mai important din tot ce mi se întâmplă e articolul la care lucrez cu Clément.

*

Situat în campusul Pierre şi Marie Curie, Institutul Henri Poincaré (IHP), „Casa Matematicii şi a Fizicii teoretice“, a fost fondat în 1928 pentru a scoate matematica franceză din izolarea în care se afla pe-atunci; a devenit rapid un centru important al învățământului ştiințific şi al culturii franceze. Einstein a predat aici relativitate generală, şi tot aici Volterra a introdus în Franța analiza matematică a biologiei. IHP a adăpostit şi primul institut francez de statistică, primul proiect francez pentru un calculator. Chiar şi artiştii au frecventat IHP: suprarealiştilor le plăcea să-şi caute aici inspirația, după cum atestă fotografii şi pânze ale lui Man Ray.

După ce Universitatea din Paris l-a folosit în anii ’50 şi ’60 ca loc pentru educația matematică, în anii ’70, IHP a căzut în desuetudine, renovat fiind şi refondat la începutul anilor ’90, când a primit actuala sa formă: deopotrivă şcoală internă a Universității Pierre şi Marie Curie (UPMC) şi instrument al politicii ştiințifice naționale, susținut de Centrul Național pentru Cercetări Ştiințifice (CNRS). Managementul oferit de o foarte mare universitate pune IHP la adăpost de neplăcerile hazardului şi îi asigură continuitatea printr-o importantă echipă (tehnică şi administrativă) pe care un institut de mărimea lui nu şi-ar putea-o permite. Susținerea CNRS îi

aduce mijloace suplimentare şi îi permite să beneficieze de o rețea națională de competențe.

IHP îndeplineşte funcțiuni multiple: teren al schimburilor ştiințifice naționale şi internaționale, el găzduieşte programe tematice, cursuri doctorale de nivel înalt şi nenumărate colocvii şi seminarii. Are un rol federator pentru universitățile franceze şi serveşte drept ambasadă a matematicilor franceze în societate. Bogăția vieții ştiințifice pariziene întreține în localurile IHP un furnicar matematic fără pereche la scena internațională. Consiliul de administrație al IHP, ales, în parte, prin scrutin național, cuprinde reprezentanți ai multor instituții ştiințifice franceze; consiliul ştiințific, complet independent, e format din personalități ştiințifice de prim rang. Localurile sale istorice, biblioteca de referință, expertiza în invitarea cercetătorilor străini, parteneriatul strâns cu societățile savante şi cu alte asociații dedicate matematicii sunt tot atâtea elemente care contribuie la faima sa.

Extras dintr-o notă de sinteză despre Institutul Henri Poincaré (C. Villani, septembrie 2010).

Capitolul 17

Princeton, 25 februarie 2009, după-amiază

Copiii s-au întors de la şcoală, clădesc cabane în grădină şi urmăresc veveriţele…

La celălalt capăt al firului, Clément e mai puţin senin.

— Stratificarea estimărilor permite rezolvarea unora dintre problemele pe care le evocam… dar tot rămân o mulţime!

— Bun, oricum, avansăm.

— M-am uitat atent pe Alinhac-Gérard, e o problemă mare la estimări: ar trebui un pic de marjă de regularitate pentru a avea convergenţa la zero a termenului de regularizare, şi-n plus regularizarea ar putea omorî gratis convergenţa biexponenţială a schemei.

— Mda, n-am băgat de seamă. Eşti sigur că se pierde rata de convergenţă în metoda Newton? OK, găsim noi ceva.

— Iar constantele de regularizare în analitic sunt mostruoase!

— Da, bine, constantele astea exponenţiale sunt cu adevărat îngrijorătoare, dar o scoatem cumva la capăt şi cu ele, eu sunt încrezător.

— Şi-apoi, oricum, constantele astea o să explodeze prea repede ca să poată fi omorâte de convergenţa schemei Newton! Pentru că trebuie regularizat *background*-ul ca să gestionăm eroarea introdusă de funcţia *b*, în inversul timpului, dar e o constantă, şi constanta asta trebuie să permită controlul normelor care vin din *scattering*… or, normele astea cresc pe parcursul schemei, pentru că vrem pierderi sumabile în λ!

— OK, ai dreptate, sunt de acord că încă nu se vede limpede ce trebuie făcut. Dar sunt încrezător, o să iasă!
— Stai puțin, tu chiar mai crezi că ne iese prin regularizare?
— Păi, da, astea-s detalii tehnice, dar, orişicât, una peste alta am avansat al naibii de mult! Am înțeles chestia cu rezonanța şi ecoul de plasmă, am înțeles principiul de *time cheating*, avem estimări bune pentru *scattering*, avem normele bune, e-aproape gata!

În ziua aceea, Clément m-o fi luat drept un optimist patologic, unul nebun de legat, care continuă să spere împotriva tuturor evidențelor, când nu se mai vede nici o scăpare. Noul impas pare îngrozitor, dar eu încă mai sper. Trebuie spus că în ultimele trei săptămâni am fost deja de trei ori în impas, şi de fiecare dată am reuşit să găsim o ieşire de siguranță. E drept şi că obstacolele care păreau depăşite au reapărut ca să-şi râdă de noi sub o formă diferită… E clar, amortizarea Landau neliniară e Hidra din Lerna! Dar în ziua aceea, împotriva a tot şi a toate, eram convins că nimic n-avea să ne oprească. *Inima-mi va birui fără oprelişti*.*

*

```
Date: Mon, 2 Feb 2009 19:40:04 +0100
Subject: Re: global -10
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Uite cateva observatii:

— pentru normele cu doua shifturi, deocamdata nu-mi
pierd speranta, ma uit in amanunt la scattering ca
sa vad daca estimarile pe care le am sunt suficiente
ca sa-l trec in normele cu doua shifturi,
```

* *Mon cœur vaincra sans coup férir*, ultimul vers din poezia *Spioana* de Guillaume Apollinaire. (*N. t.*)

— ok sectiunea 5, intr-adevar merge uns transferul de regularitate + castigul in descrestere, e o chestie tare draguta! Daca inteleg bine, aportul partii "castig in descrestere" este de a reporta "grosul" decalajului in shift pe doar una dintre functii (asa devine un decalaj intre cele doua shifturi ale normei cu doua shifturi), sperand ca aplicand asta pentru campul creat de densitate n-o sa doara prea tare?

— despre sectiunea 6, ok pentru ideea generala si pentru calcule, dar (1) mai degraba n-as suma seriile in k si l pt ca coeficientii nu mi se par sumabili (nu-i grav), (2) pentru a putea lua epsilon mai mic in ipotezele teor. 6.3, mi se pare ca ne trebuie si c mic, se verifica mai departe?
Urmeaza alte observatii…
numai bine, clement

Date: Sun, 8 Feb 2009 23:48:32 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: news

Iata, doua vesti bune:

— lectura articolelor despre ecoul de plasma arata ca acest fenomen e provocat exact de aceleasi "rezonante" care ne dau atat de furca in sectiunea 6. De fapt, am fost cu atat mai uimit cu cat ele utilizeaza notatii aproape identice, cu un \tau… Asta-mi intareste convingerea ca pericolul identificat in sectiunea 6 e fizic semnificativ, pe scurt, ar fi vorba sa stim daca ECOURILE AUTOCONSISTENTE din plasma se vor acumula pentru a distruge treptat dampingul.

— cred ca am gasit calea buna de a trata termenul \ell=0 pe care-l lasasem "provizoriu" deoparte in sectiunea 5 (in \sigma_0 din Teorema 5.8: il estimam ca pe ceilalti, dar pastram toti termenii si folosim faptul ca \| \int f(t,x,v) dx \| = O(1) la timp mare (sau mai degraba \| \int \nabla_v f(t,x,v) dx \| = O(1)) Asta NU E o consecinta a estimarii noastre pentru f(t,x,v) in norma alunecatoare, e o estimare in plus. Pentru o solutie a transportului liber, \inf f(t,x,v) dx se pastreaza in cursul timpului, deci e perfect rezonabil. Cand se adauga scatteringul, n-o sa mai fie O(1), ci O(t-\tau) sau ceva asemanator, si-atunci asta va fi omorata de descresterea exponentiala in ti\tau pe care o pastrasem in versiunea precedenta a Teoremei 5.8.

Schimbarile pe care le-am facut in versiunea atasata:

* schimbari in sectiunile 1 si 2 ca sa explicam bine articolele alea despre ecoul de plasma (nu pricepusem ca lumea care era experienta si probabil ca toti matematicienii au trecut pe langa importanta majora a chestiei asteia, aici cred ca suntem la kilometri inaintea celorlalti)

* adaugat o subsectiune la sfarsitul sectiunii 4, pentru a preciza care sunt normele in timp cu care vom lucra; mentionez povestea cu regularizarea prin medie spatiala, care de altfel e coerenta cu sursele indicate de Kiessling

* schimbari in sectiunea 5 pentru a tine cont de felul cum tratam termenul \ell=0

* adaugat o referinta pentru ecoul de plasma

O CONSECINTA IMPORTANTA e ca in sectiunea 8 va trebui nu doar sa propagam regularitatea

alunecatoare asupra lui f, ci sa propagam si regularitatea (in v) uniform (in t) asupra lui \int f dx

N-am schimbat nimic in sectiunea 7, dar, asa cum probabil ai inteles, ceea ce pusesem in sectiunea 7.4 “Imbunatatiri‟ e perimat, in sensul ca scrisesem partea asta inainte de a fi inteles ca tocmai diferenta (\lambd \tau +\mu) – (\lambda’ \tau’ + \mu’), sau ceva foarte asemanator, trebuie sa conteze cu adevarat.
N-am schimbat nici sectiunea 8, dar scrisesem o groaza de chestii care sunt tot caduce despre “zero mode‟ al lui f_\tau.

Tu ce noutati ai? Acum totul se sprijina pe sectiunea 7.
Numai bine
Cedric

Date: Sat, 14 Feb 2009 17:35:28 +0100
Subject: Re: global -18 final
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Uite versiunea 19 cu o versiune completa a enunturilor teoremelor 7.1 si 7.3 de scattering in norma hibrida cu unul si doua shifturi. Se pare (uf!) ca teorema de compunere cu doua shifturi din sectiunea 4 ajunge pentru demonstratie. Pare sa mearga, dar trebuie sa verifici bine, versiunea cu doua shifturi e inca de groaza. Inca n-am integrat corectia Sobolev, dar punctul asta e cu siguranta mai putin periculos. Dar am schimbat o chestie (inclusiv in teorema cu un shift): estimarile pentru pierderile de indici si de amplitudine sunt acum nu doar uniforme, ci tind la 0 si \tau \to +\infty, cum e nevoie in sectiunea 8. Iar pierderile astea

sunt in O(t-\tau) pentru (t-\tau) mic. Maine ma apuc din nou, ca sa adaug corectia Sobolev si sa completez sectiunea 8 conform sectiunii 7.
Numai bine, clement

Date: Fri, 20 Feb 2009 18:05:36 +0100
Subject: Re: Versiunea 20 in lucru
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Uite versiunea 20, tot in lucru, cu teorema stratificata cu doua shifturi completa. Acum avem o problema de fond fata de teorema 5.9: b nu poate sa tinda la 0 in timpul schemei Nash-Moser in rezultatele astea (cum pretinde teorema 5.9) pentru ca serveste la corectarea unui termen de eroare datorat chiar scatteringului, care nu tinde la zero pentru ca e legat de camp… Ma uit acum atent la teorema 5.9.
numai bine,

clement

Capitolul 18

Princeton, 27 februarie 2009

Azi e o mică sărbătoare la Institut: un colocviu de ecuații cu derivate parțiale geometrice. Casting excelent, multe vedete: toți vorbitorii avuți în vedere au acceptat onoarea de a veni să conferențieze la Princeton.

Stau în picioare, în fundul sălii de conferințe, în spatele biroului transformat în pupitru de regie. E locul cel mai bun, i l-am suflat lui Peter Sarnak, unul dintre profesorii permanenți ai Institutului. Aici sunt sigur că rămân complet treaz şi pot şi să-mi întind foile pe birou, pe când cei care stau pe scaune, mai puțin protejați împotriva picotelii, trebuie să se mulțumească doar cu o măsuță.

În timp ce ascult conferențiarul, mă plimb prin sală în şosete. Ideal pentru activarea ideilor.

În pauză, tot în şosete, alerg la birou, la etaj. Telefon lui Clément.

— Clément, ai văzut mesajul meu de ieri şi noul fişier?

— Schema cea nouă pe care o obții scriind întâi formulele caracteristicilor? Da, am prins şmecheria, am început să scriu calculele, dar pare monstruos.

E clar: cuvântul „monstruos“ revine întruna în conversațiile noastre…

— Presimt probleme de convergență, reia Clément. Mă tem şi pentru schema lui Newton, şi pentru termenii de eroare din liniarizare. Şi-apoi, mai e o chestie mai tehnică, anume că în toate cazurile vei avea *scattering*-ul din etapa precedentă – care nu-i mic!

Mă simt vexat că nu l-a convins ideea mea genială.

— OK, o să vedem, dacă nu merge – asta e, rămânem la schema actuală.

— Oricum, ți se cam ia, am scris deja peste o sută de pagini de demonstrație, şi tot nu ne iese!! Tu chiar crezi c-o facem?

— Ia-o-ncet, ia-o-ncet, suntem pe-aproape…

Jos, s-a terminat pauza, cobor în grabă să prind continuarea colocviului.

*

Ecuațiile cu derivate parțiale (EDP) sunt relații între ratele de variație ale anumitor cantități în funcție de diferiți parametri. Este unul dintre domeniile cele mai dinamice şi variate ale ştiințelor matematice, care sfidează orice încercare de unificare. EDP-urile se regăsesc în toate fenomenele fizicii mediilor continue şi se referă la toate stările materiei: gaze, fluide, solide, plasme; precum şi la toate teoriile fizice: clasică, relativistă, cuantică…

Dar ecuațiile cu derivate parțiale apar şi în spatele multor probleme geometrice; vorbim atunci despre EDP-uri geometrice. Ele permit deformarea unor obiecte geometrice conform unor legi bine determinate. În domeniul acesta, se aplică unei probleme de geometrie un mod de gândire analitic: amestec de genuri devenit din ce în ce mai frecvent în cursul secolului XX.

Colocviul din februarie 2009 de la Princeton aborda trei teme principale: geometriile conforme (schimbări ale geometriei care distorsionează distanțele, dar păstrează unghiurile); transportul optimal (cum să transporți masa de la o configurație inițială la una finală prescrisă, cheltuind minimum posibil de energie); şi probleme de frontieră liberă (în care se caută forma frontierei care separă două stări ale materiei sau două materiale). Trei domenii care țin în egală măsură de geometrie, de analiză şi de fizică.

În anii ’50, John Nash bulversase echilibrul dintre geometrie şi analiză când descoperise că problema geometrică abstractă a scufundării izometrice putea fi rezolvată cu tehnici de decorticare fină a ecuațiilor cu derivate parțiale.

Acum câțiva ani, pentru a rezolva conjectura lui Poincaré, Grigori Perelman a folosit o EDP geometrică, numită curent Ricci, inventată de Richard Hamilton. Rezolvarea asta analitică a unei probleme emblematice de geometrie a bulversat din nou echilibrul dintre discipline şi a provocat un avânt fără precedent al EDP-urilor geometrice. Bomba lui Perelman răsună ca un ecou al celei lansate de Nash, la cincizeci de ani distanță.

Capitolul 19

Princeton, 1 martie 2009

Neîncrezător, citesc şi recitesc mesajul care tocmai mi-a apărut pe ecranul calculatorului.

Clément are un plan nou? Nu mai vrea să facă regularizarea? Nu mai vrea să recâştige pierderea de regularitate codificată în decalajul în timp?

De unde scoate una ca asta? De mai multe luni ne-am pus în cap să facem să meargă o schemă Newton cu regularizare, ca în Nash-Moser; iar acum Clément zice că ne trebuie o schemă Newton fără regularizare!? Şi zice că trebuie să estimăm de-a lungul traiectoriilor, păstrând timpul inițial şi timpul final, cu *două timpuri* diferite?

La urma urmei, de ce nu? Dar orişicât! Cédric, atenție mare, tinerii sunt redutabili, începi deja să fii depăşit!

OK, e ineluctabil, tinerii sfârşesc oricum prin a învinge… dar… de pe-acum?

Să lăsăm văicăreala pe mai târziu, acum ar trebui să înțeleg ce-a vrut să spună. Până la urmă, ce e chestia asta cu estimările, de ce ar trebui să păstrăm memoria timpului inițial?

În cele din urmă, Clément şi cu mine ne vom fi împărțit foarte bine găselnițele din proiectul ăsta: la mine, normele, estimările de deflexie, descreşterea în timp mare şi ecourile; la el, *time cheating*-ul, stratificarea erorilor, estimările cu două timpuri şi procedeul fără regularizare. Şi-apoi, e ideea normelor alunecătoare, născută dintr-o şedință de lucru în comun, şi care nu ştim cui i se datorează cu adevărat… Asta fără să mai vorbim despre sutele de mici artificii de calcul.

Şi, dacă mă gândesc bine, nici nu e atât de rău că am luat-o pe căi diferite în mijlocul proiectului: timp de o lună sau două, fiecare a fost acaparat de propria idee şi a rămas surd la argumentele celuilalt, dar acum amândoi am înțeles că e cazul să împreunăm cele două puncte de vedere.

În orice caz, dacă Clément are dreptate, sare şi ultimul mare lacăt conceptual. În duminica asta de 1 martie, întreprinderea noastră intră într-o fază nouă, mai searbădă, dar mai sigură. Schema de ansamblu e gata, căutările în toate direcțiile au luat sfârşit. De-acum, trebuie să consolidăm, să întărim, să verificăm, să verificăm, să verificăm… E momentul să punem la lucru toată puterea noastră de foc în analiză!

Mult mai târziu, Clément îmi va mărturisi că, în acel week-end, se hotărâse să oprească totul. Sâmbătă dimineață scrisese un mesaj sinistru: „Am pierdut orice speranță… obstacolele tehnice sunt insurmontabile… nu văd nici o pistă… abandonez." Dar a dat înapoi în momentul trimiterii, voia să caute cuvinte cu care să mă convingă şi să mă consoleze, aşa că a pus mesajul deoparte. Pe seară, când l-a reluat, înarmat cu creion şi hârtie ca să-şi aducă aminte pistele infructuoase, a văzut uimit care e tactica bună. A doua zi, treaz de la 6 dimineața, după câteva ore de somn agitat, a scris din nou totul ca să pună pe curat ideea-cheie care avea să ne scoată din impas.

În ziua aceea am trecut la milimetru pe lângă abandonarea proiectului. Mai multe luni de muncă erau cât pe ce să dispară – în cel mai bun caz, la frigider; în cel mai rău caz, în fum.

Iar eu, de partea cealaltă a Atlanticului, nici nu bănuiam că trecusem pe lângă catastrofă, tot ce vedeam era entuziasmul care răzbătea din mesajul lui Clément.

Mâine trebuie să am grijă de copii, din cauza furtunii de zăpadă nu se face şcoală. Dar imediat după aceea, păzea!, problema nu mai are şanse. Îl iau pe Landau cu mine peste tot, în pădure, pe plajă, în pat, o să fie de groază.

În februarie 2009, am schimbat cu Clément cam 100 de mesaje; în martie vor fi peste 200.

*

Date: Sun, 1 Mar 2009 19:28:25 +0100
Subject: Re: global -27
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Eventual o speranta pe alta cale: sa nu regularizam, ci sa incercam sa propagam norma cu un shift de care avem nevoie la fcr etapa a schemei, dar de-a lungul caracteristicilor etapei precedente. Deci am estima la rangul n in ordinea (nu scriu de fiecare data pierderile sumabile in lambda si mu):
1) norma F a densitatii \rho_n de indice lambda t+mu
2) norma Z a distrib h_n de indice lambda, mu si t
3) norma C a mediei spatiale <h_n> de indice lambda
4) norma Z la timpul tau cu un shift -bt/(1+b) de-a lungul caracteristicilor (complete) S_{t, tau} de ordin n-1. Derivam in tau ca sa obtinem o ecuatie pentru H_tau:=h^n _tau\circ S_{t,tau}^{n-1} de tipul (nu mai pun eventualele semne minus)
\partial_tau H=(F[h^n]\cdot\nablaf^{n-1})\circ S_{t,tau}^{n-1}+(F[h^{n-1}]\cdot\nabla h^{n-1})\circ S_{t,tau}^{n-1}
Asadar, in mare in ecuatia asta nu mai apare deloc campul, si tot membrul drept e tratat ca un termen sursa, folosind marginile de la 1) asupra densitatii: Se estimeaza norma Z cu shiftul b: pe densitate tratam eroarea comisa din cauza caracteristicilor cu acest shift (pentru ca norma e proiectata pe x), iar pentru ceilalti termeni folosim ipoteza de recurenta de la punctul precedent pentru a margini normele care apar.
5) Acum ne trebuie o margine (in norma shiftata) pentru f^n\circ S_{t,tau}^n (cu caracteristicile de la ordinul n), folosind marginea din ipoteza de recurenta (in norma shiftata) asupra lui

f^{n-1}\circ S_{t,tau}^{n-1}. Multumita punctului 4) de mai sus, prin adunare obtinem o margine pentru f^n\circ S_{t,tau}^{n-1} Apoi trebuie folosit faptul ca putem margini f^n\circ S_{t,tau}^n (caracteristici de la pasul n) in functie de f^n\circ S_{t,tau}^{n-1} (caracteristici de la pasul n-1) modulo o pierdere, sumabila cand n tinde la infinit.

In rezumat ideea generala ar fi:

— Ca sa estimam densitatea, nu avem de ales, ne trebuie caracteristici si o norma shiftata (cu un shift de ordinul 1) pentru distributia de la pasul precedent, de-a lungul caracteristicilor de la pasul precedent,

— Dar, odata ce avem marginea pentru caracteristici, putem lucra de-a lungul caracteristicilor si in norma shiftata, pentru ca, proiectate pe densitate, aceste doua fenomene se anuleaza.

Dimpotriva, in tot ce-am spus deja am lasat deoparte gradientul in v pe background, care nu comuta cu compunerea cu caracteristicile, dar putem spera ca exista ceva de genul norma shiftata a lui (\nabla_v f^{n-1})\circ S_{t,tau}^{n-1} mai mic decat constanta ori norma shiftata a lui \nabla_v (f^{n-1})\circ S_{t,tau}^{n-1})…

Daca esti pe-acolo, am putea discuta la tel sunt acasa inca o ora: cred ca asta se potriveste destul de bine cu schema ta, cu diferenta ca disting fundamental doua etape si privesc lucrurile de-a lungul caracteristicilor doar intr-un al doilea timp.

Numai bine, Clement

Date: Mon, 2 Mar 2009 12:34:51 +0100
Subject: Versiunea 29
From: Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Iata versiunea 29 in care am incercat sa aplic strategia despre care iti povesteam ieri: apare in sectiunea 9 despre stabilitatea liniara, pe care am rescris-o complet, si in subsectiunile 11.5 si 11.6 din sectiunea despre schema Newton, in care am pus liniile mari ale studiului de convergenta. Daca nu e vreo greseala babana, incep sa cred ca ne apropiem de potou!!

Capitolul 20

Princeton, 11 martie 2009

Tocmai m-am întors de la savuroasa cantină. Conversație plină de antren, de matematică şi de bârfe.

Azi, în fața mea stătea Peter Sarnak; eu l-am orientat către Paul Cohen, îndrumătorul lui de teză, cel care a demonstrat indecidabilitatea ipotezei continuumului înainte de a se întoarce spre alte orizonturi matematice, cel pentru care tânărul Peter, în căutarea frisonului cercetării, şi-a părăsit Africa de Sud natală. Cu entuziasmul său bineştiut, Peter l-a evocat pe Cohen şi gustul lui pentru demonstrarea problemelor *ab nihilo,* fără să se sprijine pe lucrările altora.



Peter Sarnak

— Cohen nu credea în matematica incrementală!

— Incrementală?

— Da, credea că matematica progresează prin salturi bruşte. Tu şi cu mine, la fel ca mulți alții, progresăm mai ales ameliorând

alte lucrări, nu şi Cohen! N-aveai voie să-i vorbeşti despre îmbunătăţiri, te lua la goană. Nu credea decât în revoluţii.

Întotdeauna e o plăcere să stai lângă Peter. La masă mai era şi tânărul meu vecin de birou, Emanuel Milman, israelian, tânără stea în urcare a geometriei corpurilor convexe. Cu tată, bunic şi unchi matematicieni, Emanuel tocmai a devenit tată. Al unui viitor matematician? În orice caz, vorbeşte despre minunatul său pui cu tot atâta entuziasm ca despre speranţele sale matematice.

Alături de Emanuel, stătea Sergiu Klainerman, fugit din România comunistă în anii ’70. Sergiu a devenit o celebritate mondială când a demonstrat, împreună cu formidabilul matematician grec Demetrios Christodoulou, un rezultat fundamental al relativităţii generale, într-o demonstraţie fluviu de 500 de pagini. Îmi place grozav să stau de vorbă cu Sergiu despre matematică, despre politică şi ecologie – toate, subiecte asupra cărora sensibilităţile noastre diverg adesea.

Şi-apoi, conversaţia era aşa de animată la masa noastră datorită lui Joel Lebowitz, care, în ciuda celor optzeci de ani bătuţi pe muchie, încă debordează de energie. Pe Joel îl interesează totul, Joel vrea să ştie tot şi, dacă e cuplat la fizica statistică, domeniul său preferat, atunci e de neoprit.



Joel Lebowitz

Profit de prezenţa lui Joel şi-l rog să-i explice lui Emanuel problema tranziţiei de fază într-un gaz format din sfere dure. Problemă simplu de formulat, fundamentală şi care sfidează

de o jumătate de veac imaginația întregii comunități a fizicii statistice.

La urma urmei, nu e inadmisibil că în 2009 încă nu ştim să explicăm misterul schimbării de stare: de ce un lichid se preface în gaz atunci când e încălzit, de ce se preface în solid când e răcit? Cine ştie, un tânăr ca Emanuel ar putea avea o idee nouă…

După pauza de prânz, îmi revin în minte toate problemele. Sunt de rezolvat tot soiul de chestiuni administrative cu Institutul Henri Poincaré sau, mai degrabă, cu afilierea mea lyoneză pe care aş vrea să mi-o păstrez în timpul mandatului de director. Marele meu complice, Alain Guionnet, îmi apără interesele în laborator, dar totul e atât de complicat… Şi am de pregătit o serie de seminarii şi, mai ales, amortizarea Landau încă nu stă în picioare! În ultimele zece zile, Clément şi cu mine am redactat versiuni noi ale articolului; ultima poartă numărul 36 şi numără 130 de pagini. Am reperat şi reparat o mulțime de greşeli, am adăugat o secțiune extrem de instructivă de contraexemple, colegul meu lyonez Francis Filbet ne-a furnizat imagini minunate de amortizare Landau obținute cu calculatorul. Dar mai sunt atâtea de făcut! Aşa că mintea mea face recapitularea în surdină: *trebuie rafinate estimările pentru caracteristici şi trebuie trecut supremumul în interiorul normei, să ne concentrăm pe @!*# de interacțiuni coulombiene, să adăugăm un indice de corecție de regularitate Sobolev cam peste tot (şapte indici,* porca miseria!*), să păstrăm stratificarea în exponențială de-a lungul schemei Newton, să facem să meargă recurența aia enormă…*

Dar neobositul Joel mă trage într-o şedință de lucru împreună cu un alt coleg francez şi simt cum mă cuprinde deznădejdea. Sunt atâtea lucruri asupra cărora ar trebui să mă concentrez, şi iată că au trecut mai multe zile în care am lucrat până la două noaptea… în torpoarea după-amiezilor, abia dacă-s în stare să-mi adun ideile. Imposibil să-l refuz pe Joel,

dar, văzând că şedinţa de lucru se prelungeşte, clachez şi optez pentru un subterfugiu mârşav: îi părăsesc anunţând că trebuie să iau copiii de la şcoală (de fapt, azi îi ia Claire); apoi aştept ca ei să meargă să lucreze în altă sală, revin discret în biroul meu, mă întind pe jos, adorm şi-mi las creierul frământat să-şi pună gândurile în ordine.

Treaz, mă reapuc imediat de lucru.

*

Paul Cohen, tânăr coleg şi rival ambiţios al lui Nash la Princeton, e una dintre minţile cele mai creative ale secolului XX. Cel mai mare titlu de glorie al său e soluţia ipotezei continuumului, cunoscută şi drept problema cardinalului intermediar. *Enigma aceasta, care făcea parte din lista de 23 de probleme-far enunţate de Hilbert în 1900, era considerată, în epocă, drept una dintre cele mai importante din matematică; e clar că rezolvarea ei i-a adus medalia Fields, în 1966.*

Am nevoie de un mic ocol pentru a explica ipoteza continuumului. Numerele întregi (1, 2, 3, 4, ...) sunt în număr infinit, evident. La fel şi numerele fracţionare (1/2, 3/5, 4/27, 53417843/14366532, ...) Numerele fracţionare par să fie mai multe decât cele întregi, dar e doar o iluzie: fracţiile se pot enumera, de exemplu:

1, 1/2, 2/1 (=2), 1/3, 3, 1/4, 2/3, 3/2, 4, 1/5, 5, 1/6, 2/5, 3/4, 4/3, 5/2, 6…

şi aşa mai departe, crescând câte puţin suma (numărător+numitor) – aşa cum explică foarte bine Ivar Ekeland în povestirea atât de amuzantă Pisica în ţinutul numerelor. *Aşadar, nu sunt mai multe numere fracţionare decât numere întregi, ci sunt exact la fel de multe.*

În schimb, dacă ne uităm la numerele reale, acelea care se scriu cu o infinitate de zecimale (sunt şi limitele de numere fracţionare), atunci un argument magnific al lui Cantor arată că acestea sunt mult mai multe, e imposibil să fie numărate.

Avem deci o cantitate infinită de numere întregi şi o cantitate infinită şi mai mare de numere reale. Există oare un infinit care să fie mai mare decât infinitul întregilor şi mai mic decât infinitul numerelor reale?

Generaţii de logicieni şi-au rupt dinţii în problema asta, unii încercând să demonstreze că da, acest infinit există, alţii, dimpotrivă, că nu, nu există aşa ceva.

Paul Cohen nu era specialist în logică, dar credea în puterea minţii sale. Într-o zi, s-a apucat de această problemă şi, spre stupoarea generală, a demonstrat că răspunsul nu e nici da, nici nu. Există o lume matematică cu un infinit intermediar, există şi o lume matematică fără un infinit intermediar, şi rămâne ca noi s-o alegem pe cea pe care o vrem. Amândouă sunt corecte, dar care din ele e mai naturală este o problemă viu dezbătută de specialiştii în teoria mulţimilor.

*

Joel Lebowitz e papa fizicii statistice, ştiinţa care caută să descopere proprietăţile sistemelor constituite dintr-un număr mare de particule. Gaz format din miliarde de miliarde de molecule, populaţii biologice formate din milioane de indivizi, galaxii formate din sute de miliarde de stele, reţele cristaline formate din miliarde de miliarde de atomi… sunt multe problemele care ţin de fizica statistică! Şi, de aproape şaizeci de ani, Joel îşi pune energia inepuizabilă în slujba pasiunii sale, lucrând fără oprire împreună cu colegi matematicieni şi fizicieni. Cu două sesiuni pe an de mai bine de o jumătate de veac, seria de colocvii pe care a organizat-o e, cu siguranţă, cea mai veche şi cea mai alimentată dintre toate seriile organizate de un cercetător activ.

Născut în Cehoslovacia acum peste optzeci de ani, Joel a avut o viaţă plină – cu amintiri bune şi rele deopotrivă. Pe antebraţul său e tatuat un număr, despre asta nu vorbeşte niciodată. În orice adunare, Joel e primul la râs şi la băut, ca

şi la discuţiile despre fizica statistică, bineînţeles, pe toate ariile şi pe orice tonalitate. Ar trebui să măsurăm energia oamenilor în mili-Joeli, în miimi de Joel, spunea râzând unul dintre colegi: o miime din energia lui Joel e deja bine. Sau poate chiar un pico-Joel, dacă e să fim drepţi.

*

Date: Mon, 9 Mar 2009 21:42:10 -0500
From: Francis FILBET <filbet@math.univ-lyon1.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Cc: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

Hello

Iata rezultatele din weekend. Filmulete, nu-i mare lucru (nu se compara cu un Desplechin): in partea de simul numerica a particulelor incarcate.

http:/math.univ-lyon1.fr/~filbet/publication.html

E cazul plasmei. Inca n-am schimbat semnul pentru cazul gravit, dar ma mira foarte tare ce spui. Cred ca e nevoie de un fond neutralizant pentru a pastra un potential periodic i.e. \int_0^L E(t,x)dx=0 cand ai cond la limita periodice

Date: Mon, 9 Mar 2009 22:11:10 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Francis FILBET <filbet@math.univ-lyon1.fr>
Cc: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>,
Clement Mouhot <clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>

Imaginile sunt magnifice! E emotionant sa vezi "de-adevaratelea" efectele ecuatiilor la care am lucrat "abstract"…
Cedric

Capitolul 21

Princeton, 13 martie 2009

Închid uşa camerei copiilor, fetiţa încă mai chicoteşte în pat cu gândul la aventurile lui Goofy, eroul poveştii imaginare a zilei. *Dormiţi, minunăţii micuţe, mâine-i o nouă zi.**

Tot în pat, Claire profită de ultima ocazie de a-şi aduce aminte cunoştinţele de japoneză, înaintea plecării pe teren cu colegii geologi, mâine în zori. E momentul cel mai bun să mă apuc de lucru. Îmi fac un ceai, îmi întind notele. Încă un munte de probleme tehnice pe care-l nivelăm sistematic, Clément şi cu mine.

Partea cea mai lungă din demonstraţie, secţiunea 9, e abia în curs de construcţie. E nenorocitul ăsta de control al modului zero, eram sigur că avea să-mi scoată peri albi. Şi, peste zece zile, trebuie să fac o expunere cu rezultatul ăsta! Zece zile minuscule ca să fac să funcţioneze totul.

*

```
Date: Fri, 13 Mar 2009 21:18:58 +0100
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: 38!
```

* Vers din *Berceuse paternelle*, de Jacques Prévert: „Dormez petites merveilles, il fera jour demain.“ (*N. t.*)

Atasat, versiunea 38. Cu modificarile:

— 2-3 erori de scriere corectate ici colo pe care le poti vedea cu diff daca e cazul
— sectiunea 9 e acum completa modulo un anumit numar de formule, e momentul sa fii curajos si sa duci calculele la capat! E destul de frumos cand vezi cum se leaga toate ingredientele ca sa duca la rezultat. Organizarea acestei sectiuni justifica a posteriori planul de ansamblu al articolului (in particular punerea caracteristicilor la inceput). Cateva recitiri ar trebui sa fie de-ajuns ca sectiunea sa fie OK, iar apoi va fi pregatita pentru alegerea constantelor (Fiti binevenite, calcule!)
— am taiat masiv din toate vechile comentarii, in special din cele legate de regularizare.
— dar tot mai sunt doua gauri legate de mediile spatiale!
* prima e in legatura cu necesitatea de a stratifica estimarile asupra lui <\nabla h^k\circ\Om^n> (sectiunea 9.4). E delicat, asa cum explic in fisier, nu te poti sprijini pe recurenta, dar nici pe regularitate pentru ca \Om^n e foarte putin regulat. Singura solutie pe care o vad e utilizarea regularitatii Sobolev aditionale a caracteristicilor, care se propaga uniform in n. Atentie, avem nevoie de regularitatea in viteza, dar ar trebui sa fie OK, regularitatea Sobolev a fortei conduce la regularitate in toate variabilele. Trebuie sa castigam exact o derivata, ceea ce inseamna ca si aici Coulomb e critic…
* al doilea e tratamentul modului de ordin 0 in etimarile din sectiunea 6, unde deocamdata nu merge (constante prea mari ca sa mai fie verificat criteriul de stabilitate). Sunt destul de optimist, cred ca-mi voi recicla vechea mea idee de a folosi schimbarea de variabile in scattering si estimarile asupra caracteristicilor DIRECTE. Cand am facut acele incercari, n-am avut in minte ordinea de marime buna, inca nu stratificasem, pe scurt eram mult mai putin inarmati.

Propun urmatoarea impartire: mai intai, tu te ocupi sa faci sa convearga sectiunea 9 lasand deoparte cele doua gauri de mai sus; apoi te ocupi de aranjarea primei gauri. In timpul asta, eu vad de gaura a doua. A priori, nu pun mana pe fisierul tex in zilele urmatoare.

Pentru cazul coulombian: mai vedem noi, cred ca prioritatea e umplerea gaurilor.

O sa am o saptamana mai grea pentru ca o sa am singur grija de copii, in plus sunt si invitati in lab. Dar e aproape sprintul final.

Numai bine,
Cedric

Capitolul 22

Princeton, noaptea de 15 spre 16 martie 2009

Aşezat direct pe mochetă, înconjurat de foile cu note mâzgălite, scriu, tastez cu o exaltare febrilă.

Azi, duminică, am avut grijă să nu fac matematică în timpul zilei, am început prin a duce copiii la un *brunch* la Alice Chang în compania multor nume mari de matematicieni. Profesor la Universitatea din Princeton, conferenţiar plenar la Congresul Internaţional al Matematicienilor acum câţiva ani, Alice Chang e o specialistă recunoscută în analiza geometrică; ea e cea care m-a invitat la IAS ca să particip la programul pe care-l organizează anul acesta.



Alice Chang

Azi-dimineaţă, în timpul *brunch*-ului, s-a discutat un pic despre tot, de exemplu, despre faimosul clasament Shanghai,

clasamentul tuturor universităților din lume, care acaparează atenția mediilor şi politicienilor francezi. Când am abordat subiectul cu Alice, mă întrebam cum avea să reacționeze, ea care e profesor în unul dintre departamentele de matematică cele mai celebre din lume, dar şi chinezoaică. Avea să se arate mândră de importanța pe care a căpătat-o acest clasament chinezesc? Reacția ei m-a dezumflat.

— Cédric, ce-i aia clasament Shanghai?

Când i-am explicat despre ce e vorba, m-a privit de parcă eram căzut în cap.

— Cédric, nu pricep, *în Franța* se consideră un punct de onoare să fii în clasamentul ăsta *chinezesc*?

(Coco, nu crezi că inversezi rolurile?) Tare mi-ar plăcea să le-o prezint pe Alice colegilor francezi care se ocupă de politică!

În fine, abia seara, târziu, după ce am culcat copiii, m-am apucat de lucru. Şi – miracol! –, totul pare să se lege ca prin minune. Tremur tot în timp ce redactez ultimele 6 sau 7 pagini care, sunt convins, vor marca finalul demonstrației, cel puțin pentru interacțiuni mai regulate decât interacțiunile coulombiene. Sunt multe capcane, dar nici una nu pare de neocolit.

Merg la culcare la două şi jumătate, dar mintea mi-e atât de agitată că rămân treaz încă multă, multă vreme, cu ochii larg deschişi.

Adorm la trei şi jumătate.

La patru, mă trezeşte fi-miu, a făcut pipi în pat. Nu i se mai întâmplase de ani buni, trebuia să se întâmple taman în noaptea asta…

Asta-i viața, mergem înainte, schimb cearşafurile, în fine, tot tacâmul.

Sunt nopți când toate conspiră ca să nu te lase să dormi. Puțin îmi pasă!

*

Orice matematician demn de acest nume a simțit, chiar dacă numai arareori, starea de exaltare lucidă în care un gând urmează altuia ca prin miracol… Spre deosebire de plăcerea sexuală, sentimentul acesta poate dura ore şi chiar zile întregi.

André Weil

Capitolul 23

Princeton, 22 martie 2009

Până la urmă, soluția mea tot greşită era, ne-a trebuit mai bine de o săptămână ca să ne lămurim. Cea mai mare parte a demonstrației stătea în picioare, dar blestematul de mod nul încă ne chinuia… însă, oricum, eram pe-aproape!

De când e în Taiwan, unde a început să prezinte public lucrările noastre, Clément mi-a digerat ideile şi le-a încorporat ideilor lui, gătindu-le în sos propriu; apoi am reluat eu totul în stilul meu.

Acum, totul e mult mai simplu decât primul aluat şi merge! A trecut un an de când lucrăm la demonstrația asta şi, pentru prima dată, chiar pare să funcționeze.

Ar fi şi timpul: peste două zile, anunț rezultatul la Princeton…

*

```
Date: Sun, 22 Mar 2009 12:04:36 +0800
Subject: Re: finisari
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>

Gata, cred c-am inteles ce-aveai in cap pentru
media in spatiu!! Si cred ca trebuie combinat cu
ideea pe care ti-am spus-o la tel (de fapt cele
doua sunt complementare), uite care-i planul:

(1) Cred ca acel calcul la care te gandeai pentru
a folosi regularitatea mai buna si stratificata
```

a backgroundului e calculul de la paginile 65-66
la inceputul sectiunii 6: in cazul asta (fara
scattering) chiar putem folosi "gratis" marja de
regularitate pe background pentru a crea crestere
(independent de nivelul de regularitate pe campul de
forta).

(2) Trebuie atunci sa ne reducem la cazul asta cu
ideea despre care ti-am spus la tel ("restul"
despre care vorbeam nu-i nul, trebuie tratat cu
(1)):

a. inlocuim
$F[h^{ n+1}]\circ\Omega^n_{ t,\tau} \circS^0_{ \tau,t} $
cu $F[h^{ n+1}]\circS^0_{ \tau,t} $, restul are
descrestere buna in timp datorita estimarilor pe
Ω^n-Id.

b. acum punem in practica ideea de a face o
schimbare de variabila pentru a inlocui \Omega^n cu
\Omega^k in \nabla_v f^n (pentru orice k intre 1 si
n): scapam de probl care aparea cu aplicatia
\Lambda pentru ca acum nu mai compunem \Omega^n X
cu (\Omega^n)^{ -1} \omega^k, ci avem doar
(\Omega^n)^{ -1} \Omega^k, pentru care avem deja
estimari.

c. scapam din nou de aplicatia
(\Omega^n)^{ -1} \Omega^k pe care am mutat-o pe
F[h^{ n+1}] cu acelasi truc de la etapa a., ceea ce
creeaza un nou term cu restul amabil care descreste
bine in timp,
>> si ramanem cu

\sum_{ k=1} ^n \int_0 ^t \int_v F[h^{ n+1}] \cdot < (
(\nabla_vh^k) \circ \Omega^k) (x-v(t-\tau),v) > \,
d\tau \, dv

d. abia acum permutam gradientul in v cu compunerea
cu scatteringul:

< (\nabla_v f^n) \circ \Omega^k > = \nabla_v (<
f^n \circ \Omega^k >)
+ rest cu descrestere buna in \tau

>> asa ca ne mai ramane

\sum_{ k=1} ^n \int_0 ^t \int_v F[h^{ n+1}]
(x-v(t-\tau),v) \, \nabla_v U_k (v) \, d\tau \, dv

cu functiile U_k (v) de regularitate \lambda_k,
\mu_k

e. ajunsi aici, aplicam in sfarsit calculul (1)
pentru fiecare k, ceea ce ar trebui sa dea o
estimare stratificata uniforma.

Spune-mi cum ti se pare si daca ajungi la aceleasi
calcule…

Numai bine, Clement

Capitolul 24

Princeton, 29 martie 2009

Primul seminar la Princeton. În fața unor colegi titrați, preciși şi mai ales în fața lui Elliott Lieb, cordial, dar implacabil.

Între timp, Clément e la Taipei, unde expune şi el rezultatele noastre. Douăsprezece ore de decalaj orar, configurația optimă ca să lucrezi eficient! Ne şi împărțim lumea: el răspândeşte cuvântul cel bun în Asia, eu în Statele Unite.

De data asta merge bine, cu totul altă situație decât la seminarul meu şovăielnic de la Rutgers, demonstrația e corectă cel puțin 90%, şi toate ingredientele majore sunt clare; mă simt sigur pe mine, gata să răspund întrebărilor şi să explic demonstrația.

Deşi rezultatele îşi fac micul lor efect, Elliott nu e convins de ipoteza condițiilor la limită periodice, pe care o consideră aberantă.

— Dacă nu e adevărat în tot spațiul, atunci n-are sens!

— Elliott, în tot spațiul ai contraexemple, eşti obligat să pui limite!

— Dar ar trebui ca rezultatul să fie independent de limite, altfel nu-i fizică!

— Elliott, chiar şi Landau îl făcea cu condiții la limită, şi a demonstrat că rezultatul depinde foarte tare de limite, o să-mi spui că nici el nu era fizician?

— Dar n-are nici un sens!

În ziua aia, Elliott era pe cai mari. Mai e şi Greg Hammett, fizician la Princeton Plasma Physics Laboratory, PPPL, căruia

îi cade greu ipoteza mea de stabilitate în cazul plasmelor, prea tare ca să fie realistă.

Dacă mă aşteptasem la o primire triumfală, am cam dat-o-n bară!

*

Elliott Lieb e unul dintre cei mai celebri şi redutabili specialişti în fizica matematică. Membru al laboratoarelor de matematică şi de fizică de la Universitatea din Princeton, şi-a consacrat o parte din viaţă cercetărilor legate de stabilitatea materiei: ce obligă atomii să se adune, în loc să stea liniştiţi şi separaţi unul de altul? De ce suntem fiinţe coerente, în loc să ne dizolvăm în universul înconjurător? În termeni matematici, problema fusese pusă şi defrişată de Freeman Dyson, fizician emblematic al secolului XX, acum profesor emerit la IAS; a transmis virusul şi altora mai tineri, ca Elliott Lieb.

Scufundat cu totul în cercetările astea, Elliott s-a dus să caute soluţia în fizică, în analiză, în calculul energiilor. A luat cu sine o mulţime de cercetători, a creat şcoli de gândire. Pe drum, a cules dovezi spectaculoase, pepite care au schimbat faţa analizei matematice.

Pentru Elliott, nimic nu valorează mai mult în înţelegerea unei probleme decât o inegalitate bună. O inegalitate exprimă dominarea unui termen asupra altuia într-o ecuaţie, a unei forţe asupra alteia, a unei entităţi asupra alteia. Elliott a îmbunătăţit profund anumite inegalităţi celebre: inegalităţile Hardy-Littlewood-Sobolev, inegalităţile lui Young, inegalităţile Hausdorff-Young; în plus, a dat numele unor inegalităţi fundamentale, ca inegalităţile Lieb-Thirring sau inegalităţile Brascamp-Lieb, folosite acum de mulţi cercetători din toată lumea.

La aproape 80 de ani, Elliott e încă activ. Silueta sa ireproşabilă reflectă o igienă de viaţă impecabilă, comentariile lui

acide sunt temute de toți. Fața i se luminează când vorbește despre Japonia, despre inegalități sau despre bucătăria rafinată (care în japoneză înseamnă şi analiză matematică).



Elliott Lieb

Capitolul 25

Princeton, 1 aprilie 2009

1 aprilie, ziua păcălelilor!

Azi, ne-am uitat cu toții la un episod din *Lady Oscar*. Maria-Antoaneta, Axel de Fersen şi Oscar de Jarjayes au tot făcut piruete printre mari sentimente în timp ce se pregătea Revoluția Franceză.

Iar seara, înainte de culcare, o ascultăm pe Gribouille* pe YouTube, *Roza şi marinarul*. Ce minune! Are şi Internetul părți bune.

În săptămâna care a trecut, am înțeles o mulțime de lucruri în timpul expunerilor pe care le-am făcut despre amortizarea Landau.

După prima expunere, odată domolită iritarea, Elliott mi-a făcut comentarii valabile despre dificultatea conceptuală asociată modelului coulombian periodic.

La a doua expunere, am anunțat principalele idei de fizică din demonstrație. Lui Elliott i-a plăcut amestecul de matematică şi fizică, s-a arătat binevoitor şi interesat.

La a treia expunere, am găsit soluția criticii lui Hammett şi am putut anunța ipoteze aproape optimale asupra condiției de stabilitate şi asupra lungimii perturbării.

---

* Marie-France Gaîté (1941–1968), al cărei nume de scenă era Gribouille, a fost o cântăreață franceză descoperită de Jean Cocteau şi asemuită cu Edith Piaf. (*N. t.*)

Am prezentat rezultate calde şi coapte doar pe jumătate, dar strategia a fost câştigătoare: criticile îmi vor permite să avansez cu viteză considerabilă! Încă o dată, a trebuit să mă pun într-o poziție vulnerabilă ca să câştig putere.

Şi… în sfârşit, am înțeles legătura cu K.A.M.!

Tocmai legăturile ascunse între diferite domenii ale matematicii mi-au făcut reputația de cercetător. Legăturile astea sunt atât de prețioase! Ele îți permit să arunci o lumină asupra unuia sau altuia dintre domeniile implicate, ca într-un joc de ping-pong în care fiecare descoperire pe un mal conduce la o alta pe celălalt mal.

La 24 de ani, împreună cu colaboratorul meu italian Giuseppe Toscani: primul meu rezultat important, legătura dintre producția de entropie Boltzmann, ecuația Fokker-Planck şi producția de entropie a plasmei.

Doi ani mai târziu, împreună cu colaboratorul meu german Felix Otto: legătura ascunsă dintre inegalitatea lui Sobolev logaritmică şi inegalitatea de concentrare a lui Talagrand. De-atunci au mai fost propuse şi alte demonstrații… Lucrarea asta a fost lansarea mea în aventurile din domeniul transportului optimal; mulțumită ei, am fost invitat să țin un curs la nivel de cercetare la Atlanta, din care s-a născut prima mea carte.

La susținerea tezei, Yves Meyer îmi spusese: *În teza dumneavoastră sunt relații, inegalități miraculoase! Acum douăzeci de ani, lumea şi-ar fi bătut joc de lucrarea asta, nu credeau în miracole!* Dar eu cred, şi am de gând să mai produc încă.

În teză, îmi recunoşteam patru părinți spirituali – îndrumătorul meu, Pierre-Louis Lions, tutorele Yann Brenier, apoi Eric Carlen şi Michel Ledoux, ale căror lucrări le devorasem, cele care mi-au deschis larg porțile lumii Inegalităților. Sintetizasem aceste patru influențe, dar adăugasem şi alte elemente pentru a-mi crea propriul stil matematic, care a evoluat în funcție de următoarele întâlniri.

La trei ani de la susținere, împreună cu colaboratorul meu statornic Laurent Desvillettes, am descoperit o legătură improbabilă între inegalitatea lui Korn din teoria elasticității şi producția de entropie Boltzmann.

Imediat după aceea, dezvoltam teoria hipocoercivității, bazată pe o nouă analogie între problematica regularizării şi cea a convergenței către echilibru, pentru ecuațiile cu derivate parțiale disipative şi degenerate.

A urmat legătura ascunsă dintre transportul optimal şi inegalitățile Sobolev pe care am scos-o la lumină împreună cu Dario Cordero-Erausquin şi Bruno Nazaret; o legătură care a stupefiat o mulțime de analişti convinşi că stăpânesc la perfecție acele inegalități!

În 2004, ca profesor invitat la Institutul Miller din Berkeley, l-am întâlnit pe colaboratorul meu american Joel Lott, invitat al Mathematical Sciences Research Institute; împreună, am arătat cum se pot utiliza idei din transportul optimal, provenite din economie, pentru a aborda probleme de geometrie neeuclidiană în lipsa netezimii, problema zisă „a curburii Ricci sintetice". Teoria rezultată, numită uneori Lott-Sturm-Villani, a zgâlțâit câteva ziduri dintre analiză şi geometrie.

În 2007, bănuind o armonie ascunsă, am ghicit o relație tare între geometria locului de tăiere tangent şi condițiile de curbură necesare pentru regularitatea transportului optimal; o legătură care pare să iasă de niciunde şi pe care am demonstrat-o împreună cu Grégoire Loeper.

De fiecare dată, totul e declanşat de o întâlnire. De parc-aş fi un catalizator! Şi-n plus, o credință fermă în căutarea armoniilor preexistente – la urma urmei, Newton, Kepler şi atâția alții au dat exemplul. Lumea e plină de legături nebănuite!



Iar nimeni în lume nu bănuia
C-au fost legați prin destin
Marinarul din Formoza
Şi roza din Dublin

Şi doar în tăcerea fără sfârşit…

Cum nimeni nu bănuia că ar fi vreo legătură între amortizarea Landau şi teorema lui Kolmogorov.

De fapt, nu chiar nimeni, Étienne Ghys a bănuit ceva, vrăjit sau păcălit de cine ştie ce spirit malițios. Un an după discuția aceea, am toate cărțile în mână, şi acum înțeleg care-i legătura!

— Hmmm… O pierdere de regularitate într-un context perturbativ, datorată unor fenomene de rezonanță, e compensată de o schemă Newton care exploatează caracterul complet integrabil al sistemului perturbat…

Puteam să caut mult şi bine! Cine şi-ar fi imaginat o chestie atât de îmbârligată? Dar mai întâi de toate, cine-ar fi crezut că amortizarea Landau e, în fond, o chestiune de regularitate?!

Marinarul şi roza (Huard)

Au fost odat' o roză
Şi-un marinar străin
Marinarul era în Formoza
Roza era în Dublin

Nu s-au văzut niciodat'
Depărtarea era de vină
El nu păşea pe uscat
Ea nu ieşea din grădină

Deasupra rozei celei cuminți
Treceau des păsări în zbor
Şi primăveri, şi sori fiebinți
Şi tot veneau nor după nor

Deasupra marinului rătăcitor
Pluteau tot aceleaşi vise:
Primăveri, sori, nor după nor
Şi păsări cu-aripi larg deschise

Dar în septembrie marinarul muri
Şi tocmai în ziua aceea, uşor
Roza-ncepu a se-ofili
Lângă o fată bolnavă de dor

Iar nimeni în lume nu bănuia
C-au fost legați prin destin
Marinarul din Formoza
Şi roza din Dublin

Şi doar în tăcerea fără sfârşit
Un înger frumos ca un fulger
Când soarele-ajunge la asfințit
Aruncă pe mare petale din cer.

Capitolul 26

Princeton, noaptea de 8 spre 9 aprilie 2009

Versiunea 55. În timpul obositorului proces de recitire şi rafinare, a apărut o nouă gaură.

Iau foc. Începe să mă calce pe nervi!

— M-am săturat de povestea asta! Înainte, era partea neliniară, acum e partea liniară, care părea sub control şi care uite-o că cedează!

Am vorbit deja despre rezultatul nostru cam peste tot, săptămâna trecută l-am anunțat la New York, mâine Clément îl anunță la Nisa, de-acum nu mai avem dreptul să greşim, chiar trebuie să fie corect!

Dar tot e o problemă, şi trebuie să refacem nenorocita aia de Teoremă 7.4…

Sunt singur acasă cu copiii dormind, orele trec în fața peretelui mare de sticlă, dincolo de care e noaptea neagră. Aşezat pe canapea, culcat pe canapea, în genunchi lângă canapea, îmi pun la încercare toată dibăcia, scriu, scriu. Degeaba.

În noaptea aceea, m-am culcat pe la patru dimineața, într-o stare vecină cu disperarea.

*

```
Date: Mon, 6 Apr 2009 20:03:45 +0800
Subject: Landau versiunea 51
From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
```

Iti trimit unde-am ajuns, dupa 120 de pagini recitite la virgula, nu mai pot, fac o pauza asta-seara. Iti trimit versiunea 51, care in mod normal integreaza (dupa verificarea detaliata a mesajelor) toate modifurile si cerintele tale prin mail (figuri, remarci, dependenta de constante…), ca si sectiunea ta 10 rescrisa (izvorata din ultima versiune 50 pe care mi-ai trimis-o) si din noua sectiune 12.

Dinspre partea mea, am facut o relectura integrala pana la sectiunea 9 inclusiv (adica pana la pagina 118). Sunt multe NdCM* la care trebuie sa te uiti si un pachet de corecturi (amanunte) care mi se par fara dubiu. Printre NdCM, doar doua corespund unor eventuale probleme in demonstratii (dar de fiecare data nu pot pune in cauza rezultatul): sectiunea 7 pagina 100 si sectiunea 9 pagina 116.

Uite ce-ti propun in continuare: tu pleci de la versiunea asta 51 si reiei sectiunile de la 1 la 9 ca sa verifici toate NdCM si sa le elimini transand de fiecare data, intr-o versiune sa zicem 51-cv, iar eu recitesc la virgula sectiunile 10-11-12-13-14? (putem spera ca ne trimitem fisierele maine-seara sau miercuri dimineata?)

Numai bine, Clement

* Notă a lui Clément Mouhot. (*N. t.*)

Capitolul 27

Princeton, dimineața de 9 aprilie 2009

Ahhh… Ce nasol e să te trezești. Abia, abia mă scol, mă așez pe pat.

Îh?

Aud o voce-n cap. *Trebuie să treci al doilea termen în partea cealaltă, să faci transformata Fourier și să inversezi în* L^2.

Nu se poate!

Mâzgălesc o frază pe un colț de hârtie, zoresc copiii să se pregătească, le fac micul dejun și-i alerg prin iarba umedă până la stația autobuzului școlar. Un frumos autobuz galben-negru, ca în filmele americane!

Toți copiii suie cuminți în autobuzul care-i duce la școala din Littlebrook. E nostim când te gândești la concentrația de fii și fiice de oameni de știință de înalt nivel care stau pe scaunele acestui autobuz. Sunt, de exemplu, copiii compatriotului meu Ngô Bao Châu, care a lăsat regiunea pariziană pentru Princeton. Ngô a ținut afișul pentru rezolvarea sa spectaculoasă a unei probleme vechi, numite Lema Fundamentală. E un domeniu matematic vestit pentru dificultatea sa și care mi-e complet străin. În orice caz, toată lumea îl dă pe Ngô favorit la următorul tur de medalii Fields.

Gata, copiii au plecat. La Littlebrook o să-i răsfețe, o să aibă lecția de engleză personalizată în timpul zilei, vor avea grijă să le dea încredere în ei – pentru asta, se poate avea în-

credere în educatorii americani. Iar după-amiază, o să se întoarcă fericiți de ziua lor şi vor fi şi mai fericiți să-şi facă temele – din fericire, ura față de temele pentru acasă încă n-a ajuns în Statele Unite, cel puțin nu la Princeton.

Mă-ntorc repede acasă, mă instalez într-un fotoliu şi testez ideea care mi-a apărut ca prin farmec azi-dimineață, ca să umplu blestemata de gaură.

— Rămân la Fourier, cum mi-a sugerat Michael Sigal, nu merg deloc pe transformată Laplace, dar înainte de a inversa, încep să separ ca aici şi-apoi în doi timpi…

Scriu şi mă uit. O clipă de reflecție.

Merge! Aşa cred…

Merge!! E sigur!

Clar că aşa trebuia să fac. De-aici încolo, pot dezvolta, pot adăuga ingrediente, dar am deja trama.

Acum e doar o chestiune de răbdare, mi-e limpede că dezvoltarea ideii conduce la scheme pe care le recunosc. Scriu detaliile, nu mă grăbesc. E momentul să-mi pun în valoare cei optsprezece ani de practică matematică.

— Hmm, acum aduce cu o inegalitate Young… iar apoi e ca în demonstrația inegalității lui Minkowski… schimb variabilele, separ integralele…

Trec în mod semi-automat. Acum îmi pot folosi întreaga experiență… dar ca să ajung aici, mi-a trebuit un apel pe firul direct. Faimoasa linie directă, când primeşti un telefon de la dumnezeul matematicii şi o voce îți răsună-n cap. E extrem de rar, credeți-mă!

Îmi amintesc de o altă experiență de linie directă. În iarna lui 2001, profesor la Lyon, am ținut o vreme un curs la Institutul Henri Poincaré, în fiecare miercuri. Expuneam cvasi-soluția mea pentru conjectura lui Cercignani când, într-o miercuri, Thierry Bodineau m-a oprit şi m-a întrebat dacă nu puteam să ameliorez o anume parte a enunțului. La întoarcere,

în TGV, gândindu-mă la asta, am pus ca iluminat mâna pe o schemă de demonstrație mult mai puternică şi care-mi permitea chiar să închei demonstrația conjecturii. Apoi, în zilele următoare, am completat argumentul ca să tratez un caz mai general, o extensie a conjecturii într-un anume sens; şi mă pregăteam, mândru, ca miercurea următoare să expun noile rezultate.

Dar marți am descoperit o eroare fatală în demonstrația teoremei a doua. Mi-am petrecut toată seara încercând s-o repar şi m-am culcat pe la trei-patru noaptea, fără succes.

A doua zi, abia trezit, răsuceam problema în minte, neputând accepta că trebuie să renunț să-mi prezint rezultatul. M-am dus la gară cu capul plin de piste care nu duceau nicăieri. Dar, de îndată ce m-am instalat în TGV, a venit iluminarea şi *am ştiut* cum trebuie corectată demonstrația.

De data asta, tot drumul în TGV am pus pe picioare rezultatul şi l-am anunțat cu toată mândria care se poate imagina. Publicată puțin mai târziu, demonstrația asta *made in TGV* a format materia unuia dintre cele mai bune articole ale mele.

Iar în dimineața asta de 9 aprilie 2009, o nouă mică iluminare mi-a bătut la poarta minții şi a limpezit totul. Mare păcat: cu siguranță, cititorii articolului nu vor simți euforia asta, iluminarea va fi înecată în tehnică…

*

To state the main result of this section we shall write $\mathbb{Z}^d_* = \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$; and if a sequence of functions $\Phi(k,t)$ ($k \in \mathbb{Z}^d_*$, $t \in \mathbb{R}$) is given, then $\|\Phi(t)\|_\lambda = \sum_k e^{2\pi\lambda|k|}\,|\Phi(k,t)|$. We shall use $K(s)\,\Phi(t)$ as a shorthand for $(K(k,s)\,\Phi(k,t))_{k\in\mathbb{Z}^d_*}$, etc.

Theorem 7.7 *(Growth control via integral inequalities). Let* $f^0 = f^0(v)$ *and* $W = W(x)$ *satisfy condition* **(L)** *from Subsection 2.2 with constants* C_0, λ_0, κ*; in particular* $|\tilde{f}^0(\eta)| \le C_0\, e^{-2\pi\lambda_0|\eta|}$*. Let further*

$$C_W = \max\left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*} |\widehat{W}(k)|,\ \ \sup_{k\in\mathbb{Z}^d_*} |k|\,|\widehat{W}(k)| \right\}.$$

Let $A \ge 0$*,* $\mu \ge 0$*,* $\lambda \in (0, \lambda^*]$ *with* $0 < \lambda^* < \lambda_0$*. Let* $(\Phi(k,t))_{k\in\mathbb{Z}^d_*,\, t\ge 0}$ *be a continuous function of* $t \ge 0$*, valued in* $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d_*}$*, such that*

$$\forall\, t \ge 0, \qquad \left\| \Phi(t) - \int_0^t K^0(t-\tau)\,\Phi(\tau)\,d\tau \right\|_{\lambda t+\mu}$$
$$\le A + \int_0^t \left[K_0(t,\tau) + K_1(t,\tau) + \frac{c_0}{(1+\tau)^m} \right] \|\Phi(\tau)\|_{\lambda\tau+\mu}\,d\tau, \tag{7.22}$$

where $c_0 \ge 0$*,* $m > 1$ *and* $K_0(t,\tau)$*,* $K_1(t,\tau)$ *are nonnegative kernels. Let* $\varphi(t) = \|\Phi(t)\|_{\lambda t+\mu}$*. Then*

(i) Assume $\gamma > 1$ *and* $K_1 = c\,K^{(\alpha),\gamma}$ *for some* $c > 0$*,* $\alpha \in (0, \overline{\alpha}(\gamma))$*, where* $K^{(\alpha),\gamma}$ *is defined by*

$$K^{(\alpha),\gamma}(t,\tau) = (1+\tau)\, d \sup_{k\neq 0,\ \ell\neq 0} \frac{e^{-\alpha|\ell|}\, e^{-\alpha\left(\frac{t-\tau}{t}\right)|k-\ell|}\, e^{-\alpha|k(t-\tau)+\ell\tau|}}{1+|k-\ell|^\gamma},$$

and $\overline{\alpha}(\gamma)$ *appears in Proposition 7.1. Then there are positive constants* C *and* χ*, depending only on* $\gamma, \lambda^*, \lambda_0, \kappa, c_0, C_W, m$*, uniform as* $\gamma \to 1$*, such that if*

$$\sup_{t\ge 0} \int_0^t K_0(t,\tau)\,d\tau \le \chi \tag{7.23}$$

and

$$\sup_{t\ge 0} \left(\int_0^t K_0(t,\tau)^2\,d\tau \right)^{1/2} + \sup_{\tau\ge 0} \int_\tau^\infty K_0(t,\tau)\,dt \le 1, \tag{7.24}$$

then for any $\varepsilon \in (0, \alpha)$,

$$\forall\, t \geq 0, \qquad \varphi(t) \leq C\, A\, \frac{(1+c_0^2)}{\sqrt{\varepsilon}}\, e^{C\, c_0}\, \left(1 + \frac{c}{\alpha\, \varepsilon}\right) \times e^{CT}\, e^{C\, c\, (1+T^2)}\, e^{\varepsilon t}, \tag{7.25}$$

where

$$T = C\, \max\left\{ \left(\frac{c^2}{\alpha^5\, \varepsilon^{2+\gamma}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\; ;\; \left(\frac{c}{\alpha^2\, \varepsilon^{\gamma+\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\; ;\; \left(\frac{c_0^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2m-1}} \right\}. \tag{7.26}$$

(ii) Assume $K_1 = \sum_{1 \leq i \leq N} c_i\, K^{(\alpha_i),1}$ for some $\alpha_i \in (0, \overline{\alpha}(1))$, where $\overline{\alpha}(1)$ appears in Proposition 7.1; then there is a numeric constant $\Gamma > 0$ such that whenever

$$1 \geq \varepsilon \geq \Gamma\, \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{\alpha_i^3},$$

one has, with the same notation as in (i),

$$\forall\, t \geq 0, \qquad \varphi(t) \leq C\, A\, \frac{(1+c_0^2)\, e^{C\, c_0}}{\sqrt{\varepsilon}}\, e^{CT}\, e^{C\, c\, (1+T^2)}\, e^{\varepsilon t}, \tag{7.27}$$

where

$$c = \sum_{i=1}^{N} c_i, \qquad T = C\, \max\left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{\alpha_i^3}\right)\; ;\; \left(\frac{c_0^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2m-1}} \right\}.$$

Proof of Theorem 7.7. We only treat (i), since the reasoning for (ii) is rather similar ; and we only establish the conclusion as an *a priori* estimate, skipping the continuity/approximation argument needed to turn it into a rigorous estimate. Then the proof is done in three steps.

Step 1 : *Crude pointwise bounds.* From (7.22) we have

$$\varphi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d_*} |\Phi(k,t)|\, e^{2\pi(\lambda t+\mu)|k|} \tag{7.28}$$
$$\le A + \sum_k \int_0^t \left|K^0(k,t-\tau)\right| e^{2\pi(\lambda t+\mu)|k|}\, |\Phi(t,\tau)|\, d\tau$$
$$+ \int_0^t \left[K_0(t,\tau) + K_1(t,\tau) + \frac{c_0}{(1+\tau)^m}\right] \varphi(\tau)\, d\tau$$
$$\le A + \int_0^t \Bigg[\left(\sup_k \left|K^0(k,t-\tau)\right| e^{2\pi\lambda(t-\tau)|k|}\right)$$
$$+ K_1(t,\tau) + K_0(t,\tau) + \frac{c_0}{(1+\tau)^m}\Bigg] \varphi(\tau)\, d\tau.$$

We note that for any $k \in \mathbb{Z}^d_*$ and $t \ge 0$,

$$\left|K^0(k,t-\tau)\right| e^{2\pi\lambda|k|(t-\tau)} \le 4\pi^2\, |\widehat{W}(k)|\, C_0\, e^{-2\pi(\lambda_0-\lambda)|k|t}\, |k|^2\, t$$
$$\le \frac{C\, C_0}{\lambda_0-\lambda} \left(\sup_{k\neq 0}\, |k|\, |\widehat{W}(k)|\right) \le \frac{C\, C_0\, C_W}{\lambda_0-\lambda},$$

where (here as below) C stands for a numeric constant which may change from line to line. Assuming $\int K_0(t,\tau)\, d\tau \le 1/2$, we deduce from (7.28)

$$\varphi(t) \le A + \frac{1}{2}\left(\sup_{0\le\tau\le t} \varphi(\tau)\right)$$
$$+ C\int_0^t \left(\frac{C_0\, C_W}{\lambda_0-\lambda} + c\,(1+t) + \frac{c_0}{(1+\tau)^m}\right) \varphi(\tau)\, d\tau,$$

and by Gronwall's lemma

$$\varphi(t) \le 2A\, e^{C\left(\frac{C_0\, C_W}{\lambda_0-\lambda}\, t + c(t+t^2) + c_0\, C_m\right)}, \tag{7.29}$$

where $C_m = \int_0^\infty (1+\tau)^{-m}\, d\tau$.

Step 2 : L^2 *bound.* This is the step where the smallness assumption (7.23) will be most important. For all $k \in \mathbb{Z}^d_*$, $t \ge 0$, we define

$$\Psi_k(t) = e^{-\varepsilon t}\, \Phi(k,t)\, e^{2\pi(\lambda t+\mu)|k|}, \tag{7.30}$$

$$\mathcal{K}_k^0(t) = e^{-\varepsilon t}\, K^0(k,t)\, e^{2\pi(\lambda t+\mu)|k|}, \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned} R_k(t) = e^{-\varepsilon t} &\left(\Phi(k,t) - \int_0^t K^0(k,t-\tau)\,\Phi(k,\tau)\,d\tau\right) \\ &\times e^{2\pi(\lambda t+\mu)|k|} \\ &= \big(\Psi_k - \Psi_k * \mathcal{K}_k^0\big)(t), \end{aligned} \tag{7.32}$$

and we extend all these functions by 0 for negative values of t. Taking Fourier transform in the time variable yields $\widehat{R}_k = (1 - \widehat{\mathcal{K}}_k^0)\,\widehat{\Psi}_k$; since condition **(L)** implies $|1 - \widehat{\mathcal{K}}_k^0| \geq \kappa$, we deduce $\|\widehat{\Psi}_k\|_{L^2} \leq \kappa^{-1}\,\|\widehat{R}_k\|_{L^2}$, *i.e.*,

$$\|\Psi_k\|_{L^2(dt)} \leq \frac{\|R_k\|_{L^2(dt)}}{\kappa}. \tag{7.33}$$

Plugging (7.33) into (7.32), we deduce

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^d_*, \qquad \big\|\Psi_k - R_k\big\|_{L^2(dt)} \leq \frac{\|\mathcal{K}_k^0\|_{L^1(dt)}}{\kappa}\,\|R_k\|_{L^2(dt)}. \tag{7.34}$$

Then

$$\begin{aligned} \big\|\varphi(t)\,e^{-\varepsilon t}\big\|_{L^2(dt)} &= \left\|\sum_k |\Psi_k|\right\|_{L^2(dt)} \\ &\leq \left\|\sum_k |R_k|\right\|_{L^2(dt)} + \sum_k \|R_k - \Psi_k\|_{L^2(dt)} \\ &\leq \left\|\sum_k |R_k|\right\|_{L^2(dt)} \left(1 + \frac{1}{\kappa}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d_*} \|\mathcal{K}_\ell^0\|_{L^1(dt)}\right). \end{aligned} \tag{7.35}$$

(Note : We bounded $\|R_\ell\|$ by $\|\sum_k |R_k|\|$, which seems very crude ; but the decay of $\mathcal{K}_k^0$ as a function of k will save us.) Next, we note that

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_k^0\|_{L^1(dt)} &\leq 4\pi^2\,|\widehat{W}(k)| \int_0^\infty C_0\, e^{-2\pi(\lambda_0-\lambda)|k|t}\,|k|^2\,t\,dt \\ &\leq 4\pi^2\,|\widehat{W}(k)|\,\frac{C_0}{(\lambda_0-\lambda)^2}, \end{aligned}$$

$$\sum_k \|\mathcal{K}_k^0\|_{L^1(dt)} \leq 4\pi^2 \left(\sum_k |\widehat{W}(k)|\right) \frac{C_0}{(\lambda_0-\lambda)^2}.$$

Plugging this in (7.35) and using (7.22) again, we obtain

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi(t)\, e^{-\varepsilon t}\right\|_{L^2(dt)} &\leq \left(1+\frac{C\,C_0\,C_W}{\kappa\,(\lambda_0-\lambda)^2}\right) \left\|\sum_k |R_k|\right\|_{L^2(dt)} \\
&\leq \left(1+\frac{C\,C_0\,C_W}{\kappa\,(\lambda_0-\lambda)^2}\right) \left\{\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}\left(A+\int_0^t \left[K_1+K_0\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left. +\frac{c_0}{(1+\tau)^m}\right]\varphi(\tau)\,d\tau\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{7.36}$$

We separate this (by Minkowski's inequality) into various contributions which we estimate separately. First, of course

$$\left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}\, A^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2\varepsilon}}. \tag{7.37}$$

Next, for any $T \geq 1$, by Step 1 and $\int_0^t K_1(t,\tau)\,d\tau \leq Cc(1+t)/\alpha$,

$$\begin{aligned}
&\left\{\int_0^T e^{-2\varepsilon t}\left(\int_0^t K_1(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (7.38) \\
&\leq \left[\sup_{0\leq t\leq T}\varphi(t)\right]\left(\int_0^T e^{-2\varepsilon t}\left(\int_0^t K_1(t,\tau)\,d\tau\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\,A\,e^{C\left[\frac{C_0\,C_W}{\lambda_0-\lambda}\,T+c\,(T+T^2)\right]}\,\frac{c}{\alpha}\left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}(1+t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\,A\,\frac{c}{\alpha\,\varepsilon^{3/2}}\,e^{C\left[\frac{C_0\,C_W}{\lambda_0-\lambda}\,T+c\,(T+T^2)\right]}.
\end{aligned}$$

Invoking Jensen and Fubini, we also have

$$\left\{\int_T^\infty e^{-2\varepsilon t}\left(\int_0^t K_1(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7.39}$$

$$= \left\{\int_T^\infty \left(\int_0^t K_1(t,\tau)\,e^{-\varepsilon(t-\tau)}\,e^{-\varepsilon\tau}\,\varphi(\tau)\,d\tau\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left\{\int_T^\infty \left(\int_0^t K_1(t,\tau)\,e^{-\varepsilon(t-\tau)}\,d\tau\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^t K_1(t,\tau)\,e^{-\varepsilon(t-\tau)}\,e^{-2\varepsilon\tau}\varphi(\tau)^2\,d\tau\right)dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sup_{t\geq T}\int_0^t e^{-\varepsilon t}\,K_1(t,\tau)\,e^{\varepsilon\tau}\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int_T^\infty\int_0^t K_1(t,\tau)\,e^{-\varepsilon(t-\tau)}\,e^{-2\varepsilon\tau}\varphi(\tau)^2\,d\tau\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sup_{t\geq T}\int_0^t e^{-\varepsilon t}\,K_1(t,\tau)\,e^{\varepsilon\tau}\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int_0^\infty\int_{\max\{\tau\,;\,T\}}^{+\infty} K_1(t,\tau)\,e^{-\varepsilon(t-\tau)}\,e^{-2\varepsilon\tau}\,\varphi(\tau)^2\,dt\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sup_{t\geq T}\int_0^t e^{-\varepsilon t}\,K_1(t,\tau)\,e^{\varepsilon\tau}\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\sup_{\tau\geq 0}\int_\tau^\infty e^{\varepsilon\tau}\,K_1(t,\tau)\,e^{-\varepsilon t}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon\tau}\,\varphi(\tau)^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Basically we copied the proof of Young's inequality.) Similarly,

$$\left\{\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}\left(\int_0^t K_0(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7.40}$$

$$\leq \left(\sup_{t\geq 0}\int_0^t e^{-\varepsilon t}\,K_0(t,\tau)\,e^{\varepsilon\tau}\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\sup_{\tau\geq 0}\int_\tau^\infty e^{\varepsilon\tau}\,K_0(t,\tau)\,e^{-\varepsilon t}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon\tau}\,\varphi(\tau)^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sup_{t\geq 0}\int_0^t K_0(t,\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sup_{\tau\geq 0}\int_\tau^\infty K_0(t,\tau)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon\tau}\,\varphi(\tau)^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

The last term is also split, this time according to $\tau \leq T$ or $\tau > T$:

$$\left\{\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}\left(\int_0^T \frac{c_0\,\varphi(\tau)}{(1+\tau)^m}\,d\tau\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7.41}$$

$$\leq c_0\left(\sup_{0\leq\tau\leq T}\varphi(\tau)\right)$$

$$\times\left\{\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}\left(\int_0^T \frac{d\tau}{(1+\tau)^m}\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c_0\,\frac{C\,A}{\sqrt{\varepsilon}}\,e^{C\left[\left(\frac{C_0\,C_W}{\lambda_0-\lambda}\right)T+c\,(T+T^2)\right]}\,C_m,$$

and

$$\left\{\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} \left(\int_T^t \frac{c_0\, \varphi(\tau)\, d\tau}{(1+\tau)^m}\right)^2 dt\right\}^{\frac12} \tag{7.42}$$

$$= c_0 \left\{\int_0^\infty \left(\int_T^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\, \frac{e^{-\varepsilon\tau}\, \varphi(\tau)}{(1+\tau)^m}\, d\tau\right)^2 dt\right\}^{\frac12}$$

$$\leq c_0 \left\{\int_0^\infty \left(\int_T^t \frac{e^{-2\varepsilon(t-\tau)}}{(1+\tau)^{2m}}\, d\tau\right) \left(\int_T^t e^{-2\varepsilon\tau}\, \varphi(\tau)^2\, d\tau\right) dt\right\}^{\frac12}$$

$$\leq c_0 \left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}\, \varphi(t)^2\, dt\right)^{\frac12} \left(\int_0^\infty \int_T^t \frac{e^{-2\varepsilon(t-\tau)}}{(1+\tau)^{2m}}\, d\tau\, dt\right)^{\frac12}$$

$$= c_0 \left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}\, \varphi(t)^2\, dt\right)^{\frac12}$$

$$\times \left(\int_T^\infty \frac{1}{(1+\tau)^{2m}} \left(\int_\tau^\infty e^{-2\varepsilon(t-\tau)}\, dt\right) d\tau\right)^{\frac12}$$

$$= c_0 \left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}\, \varphi(t)^2\, dt\right)^{\frac12} \left(\int_T^\infty \frac{d\tau}{(1+\tau)^{2m}}\right)^{\frac12}$$

$$\times \left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon s}\, ds\right)^{\frac12}$$

$$= \frac{C_{2m}^{1/2}\, c_0}{\sqrt{\varepsilon}\, T^{m-1/2}} \left(\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}\, \varphi(t)^2\, dt\right)^{\frac12}.$$

Gathering estimates (7.37) to (7.42), we deduce from (7.36)

$$\left\|\varphi(t)\, e^{-\varepsilon t}\right\|_{L^2(dt)} \leq \left(1 + \frac{C\, C_0\, C_W}{\kappa\, (\lambda_0 - \lambda)^2}\right) \frac{C\, A}{\sqrt{\varepsilon}} \left[1 + \left(\frac{c}{\alpha\, \varepsilon} + c_0\, C_m\right)\right]$$
$$\times\, e^{C\left[\frac{C_0\, C_W}{\lambda_0 - \lambda}\, T + c\,(T + T^2)\right]} + a\left\|\varphi(t)\, e^{-\varepsilon t}\right\|_{L^2(dt)}, \tag{7.43}$$

where

$$a = \left(1 + \frac{C\, C_0\, C_W}{\kappa\, (\lambda_0 - \lambda)^2}\right) \left[\left(\sup_{t \geq T} \int_0^t e^{-\varepsilon t}\, K_1(t,\tau)\, e^{\varepsilon\tau}\, d\tau\right)^{\frac12}\right.$$
$$\times \left(\sup_{\tau \geq 0} \int_\tau^\infty e^{\varepsilon\tau}\, K_1(t,\tau)\, e^{-\varepsilon t}\, dt\right)^{\frac12}$$
$$\left. + \left(\sup_{t \geq 0} \int_0^t K_0(t,\tau)\, d\tau\right)^{\frac12} \left(\sup_{\tau \geq 0} \int_\tau^\infty K_0(t,\tau)\, dt\right)^{\frac12} + \frac{C_{2m}^{1/2}\, c_0}{\sqrt{\varepsilon}\, T^{m-1/2}}\right]$$

Using Propositions 7.1 (case $\gamma > 1$) and 7.5, as well as assumptions (7.23) and (7.24), we see that $a \leq 1/2$ for χ small enough and T satisfying (7.26). Then from (7.43) follows

$$\left\|\varphi(t)\, e^{-\varepsilon t}\right\|_{L^2(dt)} \leq \left(1 + \frac{C\, C_0\, C_W}{\kappa\, (\lambda_0 - \lambda)^2}\right) \frac{C\, A}{\sqrt{\varepsilon}} \times \left[1 + \left(\frac{c}{\alpha\, \varepsilon} + c_0\, C_m\right)\right] e^{C\left[\frac{C_0\, C_W}{\lambda_0 - \lambda}\, T + c\,(T+T^2)\right]}.$$

Step 3 : *Refined pointwise bounds.* Let us use (7.22) a third time, now for $t \geq T$:

$$\begin{aligned} e^{-\varepsilon t}\, \varphi(t) &\leq A\, e^{-\varepsilon t} \\ &\quad + \int_0^t \left(\sup_k |K^0(k, t-\tau)|\, e^{2\pi\lambda(t-\tau)|k|}\right) \varphi(\tau)\, e^{-\varepsilon\tau}\, d\tau \\ &\quad + \int_0^t \left[K_0(t,\tau) + \frac{c_0}{(1+\tau)^m}\right] \varphi(\tau)\, e^{-\varepsilon\tau}\, d\tau \\ &\quad + \int_0^t \left(e^{-\varepsilon t}\, K_1(t,\tau)\, e^{\varepsilon\tau}\right) \varphi(\tau)\, e^{-\varepsilon\tau}\, d\tau \\ &\leq A\, e^{-\varepsilon t} + \left[\left(\int_0^t \left(\sup_{k\in\mathbb{Z}^d_*} |K^0(k, t-\tau)|\, e^{2\pi\lambda(t-\tau)|k|}\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\ &\quad + \left(\int_0^t K_0(t,\tau)^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^\infty \frac{c_0^2}{(1+\tau)^{2m}}\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left. + \left(\int_0^t e^{-2\varepsilon t}\, K_1(t,\tau)^2\, e^{2\varepsilon\tau}\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right] \left(\int_0^\infty \varphi(\tau)^2\, e^{-2\varepsilon\tau}\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{7.44}$$

We note that, for any $k \in \mathbb{Z}^d_*$,

$$\begin{aligned} \left(|K^0(k,t)|\, e^{2\pi\lambda|k|t}\right)^2 &\leq 16\,\pi^4\, |\widehat{W}(k)|^2\, \left|\tilde{f}^0(kt)\right|^2 |k|^4\, t^2\, e^{4\pi\lambda|k|t} \\ &\leq C\, C_0^2\, |\widehat{W}(k)|^2\, e^{-4\pi(\lambda_0-\lambda)|k|t}\, |k|^4\, t^2 \\ &\leq \frac{C\, C_0^2}{(\lambda_0-\lambda)^2}\, |\widehat{W}(k)|^2\, e^{-2\pi(\lambda_0-\lambda)|k|t}\, |k|^2 \\ &\leq \frac{C\, C_0^2}{(\lambda_0-\lambda)^2}\, C_W^2\, e^{-2\pi(\lambda_0-\lambda)|k|t} \\ &\leq \frac{C\, C_0^2}{(\lambda_0-\lambda)^2}\, C_W^2\, e^{-2\pi(\lambda_0-\lambda)t}; \end{aligned}$$

so

$$\int_0^t \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}^d_*} \left| K^0(k, t-\tau) \right| e^{2\pi\lambda(t-\tau)|k|} \right)^2 d\tau \leq \frac{C\, C_0^2\, C_W^2}{(\lambda_0 - \lambda)^3}.$$

Then the conclusion follows from (7.44), Corollary 7.4, conditions (7.26) and (7.24), and Step 2. □

Capitolul 28

Princeton, 14 aprilie 2009

Azi am acceptat în mod oficial postul de la IHP.

Iar teorema noastră e pe drumul cel bun. În zilele din urmă, am lucrat de două ori până la patru dimineața, sunt la fel de motivat ca înainte.

Diseară mă aşteaptă o nouă lungă repriză în *tête à tête* cu Problema. Prima etapă – pun apa la fiert.

Dar mă cuprinde groaza când descopăr că în casă nu mai e ceai! Nici nu concep să mă lansez în orele de calcule care se profilează fără ajutorul *Camelliei sinensis.*

S-a făcut deja noapte, n-am de ce să sper că ar mai exista vreo dugheană deschisă în Princeton. Ascult doar de curajul meu, încalec bicicleta şi merg să fur câteva plicuri din sala comună a departamentului de matematică.

Ajuns la uşa laboratorului, tastez codul de intrare, urc la etaj. Beznă peste tot, doar pe sub uşa lui Jean Bourgain răzbate o rază de lumină. Nu sunt câtuşi de puțin surprins: chiar dacă Jean a obținut cele mai mari onoruri şi e considerat drept unul dintre cei mai puternici analişti din ultimele decenii, şi-a păstrat orarul de lucru al lupilor tineri cu dinți lungi – şi, în plus, îi place să rămână pe ora Coastei de Vest, unde merge cu regularitate. Pot paria că şi el va sta până pe la jumătatea nopții.

Mă strecor în sala comună şi, sub privirea reprobatoare a lui André Weil, înhaț plicurile atât de râvnite. Cobor în grabă.

Pe drum însă, dau peste Tom Spencer, mare specialist în fizica statistică şi unul dintre cei mai buni prieteni ai mei din Institut. Sunt nevoit să-mi mărturisesc crima.

— Aha, ceai! *Keeps you going, eh*?*

Înapoi acasă. Acum am prețioasele plicuri, le am în față, voi putea porni ceremonia.

Şi muzică, vă rog, altfel mor pe loc.

În perioada asta ascult mult cântece. Catherine Ribeiro, Ribeiro non stop. Danielle Messia cea tragică şi abandonată. *Passionaria* Catherine Ribeiro. Mama Béa Tekielski, ecorşeu cu scâncet magnific. Ribeiro, Ribeiro, Ribeiro. Muzica, tovarăşă indispensabilă a momentelor de căutare solitară.

Greu de găsit ceva mai eficient decât muzica pentru a te readuce într-un context uitat. Îmi amintesc de şocul de pe fața bunicului meu când m-a auzit pentru prima oară cântând o piesă de Francis Poulenc; dintr-odată, se văzuse proiectat cu şaizeci de ani în urmă, în apartamentul modest, cu pereți prea subțiri, în care răsunau toate operele vecinului de palier, compozitor de muzică clasică scufundat în acelaşi curent estetic ca şi Poulenc.

Cât despre mine, când ascult Gundula Janowitz intonând *Gretchen am Spinnrade***, redevin tânărul internat pentru pneumotorax la serviciul de reanimare de la Spitalul Cochin, care îşi petrecea o parte din zi devorând *Carmen Cru****, şi o parte din noapte discutând cu internii despre muzică, apoi dormind cu un ursuleț de pluş irlandez împrumutat de o prietenă.

Cemetery Polka râgâită de Tom Waits mă trimite la al doilea pneumotorax, într-un mare spital lyonez, cu un vecin de cameră hazos care le făcea să moară de râs pe infirmiere.

Metamorfoza lui John Lennon în Morsă (*Walrus*) mă duce într-o sală de la École Polytechnique, la optsprezece ani, între două examene orale ale concursului de admitere, pe când viitorul desena un simpatic semn de întrebare.

---

* Te menține în formă, nu? (N. t.)

** *Gretchen la vârtelniță*, lied de Schubert, pe versuri de Goethe (din *Faust*). (*N. t.*)

*** Bandă desenată. (*N. t.*)

Trei ani mai târziu, începutul dramatic al Primului Concert pentru pian al lui Brahms tocmai răsuna în odăița mea de la internatul Şcolii Normale Superioare, anume atunci când o tânără îmi bătea emoționată la uşă fără nici o explicație.

Ca să mă scufund din nou în prima copilărie, nimic mai bun decât obsedantul *Porque Te Vas*, care făcuse gloria lui Jeanette, sarcasticul moderat *Baleine Bleue* al lui Steve Waring sau decapantul *Grand Méchant Loup* al lui Tachan. Sau, habar n-am de ce, o anume temă din Concertul pentru vioară de Beethoven, pe care-o fredona mereu mama.

Pentru doisprezece ani, câteva dintre bucățile preferate ale părinților: *Les poètes* de Aragon şi Ferrat, *l'Éducation sentimentale* de Maxime le Forrestier, *Nancy* de Leonard Cohen, *Le Phoque* de Beau Dommage, *L'Horloge du fond de l'eau* şi *Fil Blanc* de Enfants Terribles, *Oxigène* de Jean-Michel Jarre, sau chiar „nerodul"* din cântecul lui Graeme Allwright care se încăpățânează să înainteze atunci când apa i-a ajuns *Jusqu'à la ceinture.*

Iar pentru adolescență, printre clipurile la care mă uitam pe Canalul 6 şi printre casetele de care făceam rost de te miri unde, lista ar putea fi, la grămadă: *Airport*, *Envole-moi*, *Tombé du ciel*, *Poulailler's Song*, *Le Jerk*, *King Kong 5*, *Marcia Baïla*, *Lætitia*, *Barbara*, *L'aigle noir*, *L'Oiseau de nuit*, *Les Nuits sans soleil*, *Madame Rêve*, *Sweet dreams*, *Les Mots Bleus*, *Sounds of Silence*, *The Boxer*, *Still Loving You*, *L'Étrange Comédie*, *Sans contrefaçon*, *Maldon'*, *Changer la Vie*, *Le Bagad de Lann-Bihoué*, *Aux Sombres Héros de l'Amer*, *La Ligne Holworth*, *Armstrong*, *Mississippi River*, *Le Connemara*, *Sidi H'Bibi*, *Bloody Sunday*, *Wind of Change*, *Les Murs de poussière*, *Mon Copain Bismarck*, *Hexagone*, *Le France*, *Russians*, *J'ai vu*, *Oncle Archibald*, *Sentimental Bourreau*…

---

* *Le vieux con*, în original (*N. t.*)

De-atâtea ori m-am îndrăgostit de muzici de toate felurile, clasică, pop sau rock; le-am ascultat şi răsascultat, pe unele de mai multe sute de ori, fermecat de starea de grație care trebuie să fi domnit peste naşterea lor. După *Simfonia din Lumea nouă* a lui Dvořák, care chiar marca intrarea mea în lumea cea nouă a muzicii numite clasice, au urmat al cincilea concert brandenburgic de Bach, a şaptea simfonie a lui Beethoven, al treilea concert de Rachmaninov, a doua simfonie de Mahler, a patra simfonie de Brahms, a şasea sonată de Prokofiev, prima sonată a lui Berg… Sonata lui Liszt, Studiile pentru pian ale lui Ligeti, ambigua Simfonie a cincea de Şostakovici, Sonata D784 de Schubert, al şaselea preludiu al lui Chopin (cu interpretarea dramatică de rigoare, mă rog frumos). *Toccata* lui Boëllmann, *War Requiem* de Britten, fabulosul *Nixon in China* de John Adams. *A Day in the Life* a Beatleşilor, *Butcher's Tale* a lui Zombies, *Here Today* a lui Beach Boys, *Three Sisters* a Divinei Comedy. *Gino* a lui Têtes Raides, *Lisa la Goélette* a lui Anne Sylvestre, *Excalibur* al lui William Sheller, *Monsieur* al lui Thomas Fersen. Roda-Gil cu fals uşurelul ei *Ce n'est rien*, cu a sa fals serioasă *Makhnovchina* şi cu palatul ei cu coloanele pline de tartru, la sud sau la nord de iulie. François Hadji-Lazaro cu digurile lui, şlepurile, Parisul revoltat. Mort Shuman înfierbântându-se pentru plaja din Brooklyn by the sea, iar Pagani pentru Veneția care se-neacă. Léo Férré cu a sa misterioasă *Inconnue de Londres* reorchestrată şi cu *Câinele* lui turbat, singurul care mai rezistă când *Il n'y a plus rien*. Dylan, care evocă, din turnul său de observație, soarta cumplită a lui John Brown, Pink Floyd cântând nostalgici iarba verde de odinioară, Piazzola cântând Buenos Aires-ul la ora zero. *Romanța* lui Prokofiev şi *Romanul* lui Morricone. Emoționantul *Manuel* al lui Adamo pe care l-am transcris la Moscova pentru gazdele îndrăgostite de muzică şi de limba franceză, într-o epocă în care Internetul încă nu exista acolo pentru a pune la dispoziție textele cântecelor. Fabrizio de André plângându-l

pe Geordie spânzurat de-o coardă de aur, Giorgio Gaber care se credea Dumnezeu, Paolo Conte invitându-şi iubita să-l urmeze. Micuţul René Simard storcând lacrimile mamelor quebecoaze şi ale fetelor japoneze cu al său *Oiseau* cristalin şi cu *Non ne pleures pas / Midori Iro No Yane* care-ţi taie răsuflarea. Les Frères Jacques cumpărându-şi Generalul cu cinci stele de la Francis Blanche, Weepers Circus oferindu-le vulpilor dragostea sa, Olivia Ruiz reparând inimi şi geamuri crăpate, Mes Aïeux traficând *iarbă* cu manglitori degeneraţi. Vian ambalându-se pentru o Java explozivă şi Bécaud pentru o diabolică vânzare la licitaţie, Renaud cântând epopeea lui Gérard Lambert şi Corbier pe aceea a blestematului elefantofil. Thiéfaine şi lumea lui populată cu fete de cosaşi de marihuana, de sicrie cu rotile, Alligators nucleari şi Diogeni băloşi, care suceau minţile fetelor şi băieţilor pe vremea când explodau cei douăzeci de ani ai mei. Dramaticii vibranţi, Brel strigând ţintuit de Ursa Mare, Utgé-Royo trezind la viaţă cântecul interzis *Mutins de 1917* al lui Debronckart, Ferrat salutând copilul care se ridică şi jelindu-i pe cei căzuţi pentru nenorocirea Mariei, Tachan făcând scandal că el nu vrea copii! Şi-apoi elfii care te descumpănesc, Kate Bush cu al său *Army Dreamer*, France Gall cu *Le Petit Soldat*, Loreena McKennitt cu-al său *Bandit de grand chemin*, Tori Amos visându-se în *Joyeux Fantôme*, Amélie Morin hulind simpatic în *Rien ne va plus*. Şi preferatele mele, tigroaicele care-ţi fac pielea de găină: Melanie apostrofându-i pe cei care-i stau în preajmă, Danielle Messia lamentându-se c-a fost abandonată, Patti Smith cântând *Parce que la Nuit*, Ute Lemper cuprinsă de milă pentru soarta lui Marie Sanders, Francesca Solleville reînviind Comuna, Juliette jucându-se de-a Garçon Manqué, Nina Hagen gâjâind un Kurt Weill, Gribouille urlându-şi Corbii, sublimul duo Moullet-Ribeiro cântând Pacea, Moartea şi *l'Oiseau devant la Porte*!

Nu trebuie neglijată nici o pistă ca să descoperi muzici noi. Concerte, forumuri de discuţii, site-uri de muzică în acces liber…

şi, evident, exemplarul webradio *Bide & Musique*, graţie căruia i-am descoperit pe Évariste, Adonis, Marie, Amélie Morin, Bernard Brabant sau Bernard Icher, pistele de decolare de pe Champs-Élysées şi imnurile disco întru gloria Moscovei.

Aşa-i şi-n cercetare: cauţi peste tot, stai la pândă, asculţi tot şi, din când în când, te trezeşti că te-ai îndrăgostit şi eşti prins cu trup şi suflet într-un proiect pe care ţi-l repeţi de sute şi sute de ori şi de-atunci încolo nu mai contează nimic – sau, oricum, extrem de puţin.

Uneori, cele două lumi comunică. Unele muzici, care m-au susţinut în timp ce lucram, sunt asociate pentru totdeauna cu momente puternice din munca mea de cercetare.

Când o aud pe Juliette zbierând *Monsieur Vénus*, mă revăd sub un Vélux la Lyon, în iarna lui 2006, redactându-mi articolul pentru actele Congresului Internaţional al Matematicienilor.

Comme avant, al şugubeţei Amélie Morin, sau *Hung Up on a Dream*, al melodioşilor Zombies, mă transportă în vara lui 2007, într-un apartament australian unde am învăţat, în contact fiind cu cei mai buni experţi în domeniu, teoria regularităţii transportului optimal (şi unde am fost entuziasmat de aventurile lui L, M şi N din *Death Note*, dar asta-i altă poveste).

Când Marie Laforêt intonează *Pourquoi ces nuages*, cu nuanţele alea fără pereche din vocea ei fragilă şi puternică totodată, mă văd din nou la Reading, în iarna lui 2003, explorând misterele hipocoercivităţii.

Un cântec fără titlu al lui Jeanne Cherhal mă aruncă înapoi în şcoala de vară de probabilităţi de la Saint-Flour, anul de graţie 2005, când am câştigat turneul de ping-pong în uralele mulţimii.

Al doilea concert de Prokofiev, la a cărui a patra mişcare plâng întotdeauna – îl ascultam aproape zilnic la Atlanta, în toamna lui 1999, în timp ce lucram la prima carte despre transportul optimal.

Cu *Recviemul* lui Mozart mă trezeam în fiecare dimineaţă când dădeam examenul de *agrégé*, în 1994.

Iar *Impressions Baroques*, ale lui Pär Lindh Project, răsună pentru vecie pe fondul unei nopţi islandeze de iarnă, după o expunere triumfală, în seara unui colocviu din 2005.

Experienţe încărcate deopotrivă cu speranţa descoperirii şi cu frustrarea imperfecţiunii, sau experienţa unei demonstraţii pe care-o simţi că-ţi scapă. Amestec de fericire şi durere în cercetare, plăcerea de a te simţi viu – pe care le acompaniază atât de bine muzica debordând de patimă.

În seara asta nu sunt altundeva, sunt chiar aici, la Princeton, şi în efortul care m-aşteaptă mă va însoţi Ribeiro. Imposibil s-o găsesc în comerţ, noroc cu Web-ul: cele câteva piese de pe site-ul ei Internet, apoi extraordinara selecţie Long Box de pe musicMe.

Halucinantul *Poème Non Épique* e peste tot ce se poate imagina, e o bucată cu totul specială în istoria cântecului francez, dar e prea încărcat emoţional, mi se face părul măciucă doar când mă gândesc, pe aşa ceva nu pot lucra.

Ascult, în schimb, minunatul *Jour de Fête.* Forţă, sobrietate, emoţie, putere evocatoare.

Voiam să fiu altundeva
Altundeva nu era nicăieri…

Urmează momentul meu favorit, în care vocea, până atunci reţinută, începe să se desfăşoare, să-şi facă simţită forţa. Vocea asta care face „să tresară morţii, morţii vii, şi pe cei vii".

Nu-mi mai era foame nici sete
Poftă aveam doar de dragoste
Oriunde şi oricum
Doar dragoste să fie
Dragoste chiar şi plutind
Numai emoţia s-o simt

Munceşte, Cédric, munceşte. Ceaiul, ecuaţiile, Ribeiro.

...În seara aia ce de bolnavi
Se străduiau să facă dragoste
În cearşafurile zorilor macabre
Cu răsuflarea puturoasă de alcool…

Of…

Cum se termină melodia, cum o pun din nou, iar şi iar. Am nevoie de bucla asta ca să merg înainte. Munceşte, Cédric, munceşte.

*

Zi de sărbătoare (Catherine Ribeiro)

Ziua cea mare sosise
Şi sărbătoarea se pornise
În spatele fiecărei ferestre străluceau
Ghirlande lumânări şi bomboane
În seara asta toţi se străduiau
Să-şi lase banii la casele
Magazinelor surprize peste surprize
Ziua marelui dezmăţ –

Parisul scânteia de luminiţe
Dar toată fiinţa mea era absentă
Îmi tăiase calea un satelit
Tare rău plasat pe-orbita mea
Ce dracu căutam eu pe trotuare
În buticurile duminicale
Căutând obiectul pseudo-rar
Căutând ultimul cadou –

Voiam să fiu altundeva
Altundeva nu era nicăieri…

Nu-mi mai era foame nici sete
Poftă aveam doar de dragoste
Oriunde şi oricum
Doar dragoste să fie
Dragoste chiar şi plutind
Numai emoţia s-o simt –

Şi telefonul n-a sunat
Clar că din vina companiei
Şampania nici n-avea gust
Vegheam ca să n-adorm
Timpul trecea frângându-mi inima
Iar ploaia bătea în caldarâm
Nimic nu e mai derizoriu
Decât un trup cald într-un pat pustiu –

În seara aia ce de bolnavi
Se străduiau să facă dragoste
În cearşafurile zorilor macabre
Cu răsuflarea puturoasă de alcool
Era Ziua cea Mare – Ziua Păcii
Din fundul Americilor mele
Visam la satelitul meu
Cel rău plasat pe-orbita mea –



Capitolul 29

Princeton, 20 aprilie 2009

Cu ceaşca de ceai în mână, bătrânul se întoarce spre mine şi mă priveşte insistent, fără să scoată un cuvânt, evident derutat de stilul meu vestimentar neobişnuit.

E o scenă care mi-e familiară – oameni uimiți sau descumpăniți de costumul meu şi de păianjenul pe care-l port. De obicei, îi privesc cu amuzată bunăvoință. Dar, de data asta, sunt cel puțin la fel de intimidat ca şi cel care mă observă. Pentru că e vorba despre John Nash, poate cel mai mare analist al secolului, eroul meu matematic, născut în 1928. N-a primit medalia Fields şi amărăciunea acestui eşec l-a măcinat zeci de ani. Sigur, a primit Premiul Nobel pentru economie pentru lucrările lui din tinerețe despre „echilibrele Nash“, care l-au făcut celebru în teoria jocurilor, economie, biologie. Dar ce a făcut ulterior e, pentru cunoscători, mult mai important: ar fi meritat una, două, trei medalii Fields.

În 1954, Nash a introdus scufundările neregulate, monstruozități care-ți permit să faci lucruri imposibile, cum ar fi să mototoleşti o minge de ping-pong fără să o deformezi, sau să construieşti un inel perfect plat. *Nu putea fi adevărat şi era adevărat*, a spus Gromov, care a înțeles opera geometrică a lui Nash mai bine decât oricine de pe planeta asta, şi, plecând de la ea, a dezvoltat întreaga teorie a integrării convexe.

În 1956, acceptând provocarea unui coleg neîncrezător – Ambrose –, Nash a demonstrat că toate geometriile abstracte ale Prințului Riemann – Chopin al matematicii – pot fi realizate

la modul cel mai concret. A împlinit astfel un vis vechi de aproape o sută de ani.

În 1958, răspunzând unei întrebări puse de Nirenberg, Nash a demonstrat regularitatea soluțiilor ecuațiilor liniare parabolice cu coeficienți eliptici măsurabili – continuitatea în spațiu-timp a căldurii într-un solid complet omogen. A fost începutul teoriei moderne a ecuațiilor cu derivate parțiale.

Soarta a vrut ca geniul monastic Ennio De Giorgi să rezolve această problemă simultan cu Nash, printr-o metodă complet diferită; dar asta nu scade cu nimic meritul lui Nash.

Nash e unul dintre rarii oameni de ştiință în viață care a fost eroul unui film hollywoodian. Nu mi-a plăcut prea mult filmul, dar am apreciat mult biografia care i-a stat la bază. *John Nash, a Beautiful Mind.*

Dacă Hollywoodul a fost atras de Nash, asta nu s-a întâmplat numai din pricina realizărilor matematice ale acestuia, ci, mai ales, din pricina poveştii sale tragice. La 30 de ani a înnebunit. A petrecut în azil peste un deceniu, pentru a bântui apoi, ca o jalnică fantomă, culoarele Princetonului. Iar după trei decenii în purgatoriu, Nash a părăsit țărmul nebuniei. Acum, la 80 de ani trecuți, e la fel de normal ca dumneavoastră şi ca mine.

Doar că, deasupra lui, stăruie o aură pe care nici dumneavoastră, nici eu n-o avem, mărturiile unor realizări excepționale, lovituri de geniu şi un mod de a decoji, de a analiza problemele care fac din Nash o figură tutelară pentru toți analiştii moderni, în orice caz pentru mine.

Cel care mă fixează e mult mai mult decât un om, e o legendă vie, iar eu n-am curaj să merg să-i vorbesc.

Data viitoare, voi îndrăzni să-l abordez şi am să-i povestesc cum am făcut o expunere despre paradoxul lui Scheffer-Shnirelman, cu o demonstrație inspirată de teorema lui de scufundare neregulată. Am să-i vorbesc despre proiectul meu de conferință despre el la Biblioteca Națională a Franței. Poate că am să-i spun şi că e eroul meu. Dar n-o să-i par ridicol?

*

În 1956, la New York, un vlăjgan împinge poarta unei uzine dezafectate, pe fațada căreia se poate citi Courant Institute of Mathematical Sciences. *Ținuta sa mândră nu e cu nimic mai prejos decât a lui Russell Crowe, cel care-i va interpreta rolul la Hollywood, cincizeci de ani mai târziu. Numele său e Nash, are 28 de ani şi e deja celebru în toată lumea pentru Echilibrele Nash pe care le-a inventat şi pentru demonstrația Teoremei de Scufundare: lucrări scrise la Universitatea Princeton, apoi la Massachussets Institute of Technology. Vine la New York ca să descopere colegi şi probleme noi.*

Cea pe care i-o propune Louis Nirenberg îi captează atenția. O problemă care ține în şah cei mai buni specialişti… un adversar croit, poate, pe măsura lui! Continuitatea soluțiilor ecuațiilor parabolice cu coeficienți discontinui.

În 1811, marele Fourier determinase ecuația căldurii, cea care guvernează evoluția temperaturii în funcție de poziție şi de timp într-un solid omogen în curs de răcire:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = C\,\Delta T.$$

De-atunci, ecuația sa a devenit una dintre cele mai reprezentative din clasa ecuațiilor cu derivate parțiale, ecuațiile acestea care descriu toate fenomenele continue care ne înconjoară, de la curenții marini până la mecanica cuantică.

Chiar dacă solidul e încălzit de manieră foarte neomogenă, impunând la un moment dat o temperatură care variază brusc şi aleator dintr-un loc într-altul, e suficient să lăsăm solidul să se răcească o fracțiune de secundă şi distribuția temperaturii devine regulată, variază într-un mod regulat. Fenomenul acesta, numit regularizare parabolică, e unul dintre primele pe care le învață studenții la cursul de ecuații cu derivate parțiale. Enunțul matematic corespunzător are o importanță care transcende cu asupra de măsură domeniul fizicii.

Dacă, în schimb, solidul e neomogen, format din materiale diferite, el va avea în fiecare poziție x o conductivitate C(x)

mai mare sau mai mică, adică se va răci mai uşor sau mai greu în acel punct. În consecință, ecuația devine

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \Big(C(x)\, \nabla T \Big).$$

Mai rămâne adevărată proprietatea de regularizare în acest context?

Spre deosebire de Nirenberg, Nash nu e specialist în ecuații, dar muşcă momeala. Săptămână de săptămână, vine la institut să stea de vorbă cu Nirenberg, îi pune întrebări.

La început, întrebările lui sunt naive, întrebări de novice. Nirenberg se gândeşte dacă nu cumva reputația lui Nash e exagerată. Când eşti deja celebru şi admirat, ai nevoie de curaj, nu glumă – sau de o doză neobişnuită de încredere în tine –, ca să pui întrebări de debutant într-un domeniu pe care încă nu-l stăpâneşti, ca să accepți uşoara ridicare din sprâncene, involuntar disprețuitoare, pe care riscă să o conțină răspunsul. Dar ăsta-i prețul ca să poți avansa... Şi, treptat, întrebările lui Nash se precizează, devin mai pertinente, începe să se întrevadă ceva.

Apoi, stă de vorbă şi cu alți colegi, de la unul obține informații, pe altul îl pune la treabă, unui al treilea îi propune o problemă.

Lennart Carleson, un analist suedez de mare talent, i-a vorbit despre Boltzmann şi despre entropie. Carleson e unul dintre puținii matematicieni care cunosc bine subiectul; trebuie spus că a fost executorul testamentar intelectual al lui Torsten Carleman, primul matematician care s-a luat de piept cu ecuația lui Boltzmann. La moartea sa, Carleman a lăsat un manuscris neterminat pe tema ecuației, şi i-a revenit lui Carleson sarcina de a-l completa şi corecta. Aşa a ajuns să afle despre noțiunea de entropie, iar acum a putut să-i împărtăşească şi lui Nash din ce ştie.

Dar Boltzmann şi Fourier nu seamănă deloc; entropia n-are nimic de-a face cu regularitatea!

Şi totuşi, în mintea lui Nash s-a aprins o luminiță, s-a schițat un plan de ansamblu. Fără să-şi etaleze cărțile, tânărul matematician îşi continuă conversațiile, recuperează de-aici o lemă, de-acolo o propoziție.



John Nash

Şi, într-o dimineață, lumea e silită să accepte evidența: combinând toate contribuțiile colegilor, Nash demonstrase teorema, ca un dirijor care pune fiecare muzician să-şi interpreteze partitura.

În miezul demonstrației sale, stătea entropia care, sub conducerea sa, juca în contre-emploi *un rol extrem de eficient. Maniera în care Nash folosea inegalitățile diferențiale în care apăreau anumite cantități, inspirate de o interpretare pe jumătate matematică, pe jumătate fizică, a creat un stil nou în tradiția căruia mă înscriu şi eu.*

Capitolul 30

Princeton, 4 mai 2009

Exact în clipa în care ceafa mea atinge mocheta, în corp se răspândeşte o stare de bine, porneşte din cap şi ajunge la picioare. E ora unu sau unu şi jumătate, am revenit în birou după masa de prânz, e momentul cel mai bun pentru o şedinţă de relaxare.

Dar nu una violentă, ca aceea care-i chinuie pe colegii astrofizicieni din clădirea de-alături, ci o relaxare, ce-i drept, un pic crudă, fără nimic moale între mine şi sol, în afara grosimii derizorii a mochetei din modestul meu birou. Derizorie, dar pe care ceafa o simte. M-am obişnuit aşa, şi-mi place contactul acesta din care lipseşte moliciunea.

Imaginile defilează prin faţa ochilor mei închişi, sunetele îmi ţârâie în urechi tot mai tare, în timp ce prin minte îmi trece din nou întreaga dimineaţă.

În dimineaţa asta, copiii de la şcoala primară Littlebrook au venit în vizită la Institut, au văzut lacul, minunaţii copaci înfloriţi, bustul lui Albert Einstein din vechea bibliotecă. Priviţi, copii, castelul fermecat al ştiinţei! La opt ani, nu e încă prea devreme pentru a visa la marii oameni de ştiinţă.

Le-am pregătit o expunere de douăzeci de minute, le-am vorbit despre mişcarea browniană, care permite punerea în evidenţă a atomilor, despre celebra problemă de la Syracuse*, atât de simplă încât o poate înţelege şi un copil de opt ani, şi

---

* E vorba despre Universitatea din Syracuse. (*N. t.*)

atât de complexă, încât şi cel mai bun matematician din lume s-ar recunoaşte pierdut în fața ei.

Au ascultat cuminți, în holul cel mare de la Institut, au făcut ochii mari în fața imaginilor minunate ale mişcării browniene care defilau pe laptopul meu. În ultimul rând, un blonduț cu ochii mari asculta şi mai cuminte decât ceilalți; locuia aici de numai patru luni, dar n-avea nici o dificultate să înțeleagă *speech*-ul în engleză pe care tăticul îl rostea cu un puternic accent francez.

A urmat restul dimineții, apoi prânzul cel bun, iar apoi mintea mea a început să se încețoşeze – venise momentul să pun din nou contorul la zero, timpul pauzei-fulger, cea pe care o numesc *reboot*, repunerea în funcțiune a calculatorului, şterg memoria şi o iau de la capăt.

E zgomot de fond în urechile mele, copiii vorbesc şi vorbesc, şi totul se-nvârte. Fața mea contractată se destinde, zgomotul se întețeşte, plutesc frânturi de fraze, unele mai puternice decât altele, voci şi cântece, revine masa, o lingură uitată, o procedură de primire, un lac dezghețat, un bust din bibliotecă, $3n+1$, $3n+2$, $3n+3$, parchetul şi umbrele, şi ai uitat de un puşti şi…

Membrele îmi tresar brusc, umbrele se îndepărtează, conştiința mi se limpezeşte.

Stau la pândă, mai rămân culcat câteva clipe în care mii de furnici se răspândesc în tălpile picioarelor mele fără şosete.

Picioarele mi-au dispărut de pe radarul intern, sunt atât de grele, imposibil să le mişc. Ca în schiul de fond, când sub unul dintre schiuri s-a acumulat un strat gros de zăpadă.

Şi totuşi prima mişcare îmi redă ca prin farmec picioarele, sunt iarăşi întreg. Pauza s-a terminat, a durat exact zece minute pe ceas, iar acum sunt un matematician nou.

`Cedric reboot (completed)`

Porneşte un nou Cédric. Mă arunc iarăşi în calcule şi în articolul ăsta despre amortizarea Landau, vechi de cincizeci de ani şi încă atât de actual, pe care tocmai l-am recuperat de la bibliotecă. Până la ceai, mai sunt două ore de muncă intensă.

*

Problema de la Syracuse, sau problema lui Collatz, sau problema $3n+1$*, e una dintre enigmele nerezolvate cele mai celebre din toate timpurile. N-a declarat însuşi Paul Erdös că matematica epocii noastre nu e încă pregătită să înfrunte asemenea monştri?*

Tastați „$3n+1$*" într-un motor de căutare Internet şi o să dați uşor de conjectura blestemată, simplă şi obsedantă ca un refren popular.*

Luați un număr întreg, indiferent care, să zicem 38.

E par, aşa că-l împart la 2, obțin 19.

Am găsit un impar, îl înmulțesc cu 3 şi adaug 1, obțin $19 \times 3 + 1 = 58$.

Ultimul găsit e par, îl împart la 2…

Şi aşa mai departe, trec de la un număr la altul după o regulă simplă: de fiecare dată când dau peste un număr par împart la 2, de fiecare dată când dau peste un număr impar înmulțesc cu 3 şi adaug 1.

În exemplul în care am pornit cu 38 *vom găsi succesiv: 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1…*

E clar că, de îndată ce am dat peste 1, ştim ce urmează: 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ad calculam aeternam.

De fiecare dată, în toată istoria omenirii, când s-a făcut calculul acesta, s-a ajuns la 4, 2, 1. Putem trage concluzia că aşa va fi întotdeauna, oricare ar fi numărul care serveşte drept punct de pornire?

Evident, cum există o infinitate de numere întregi, nu le putem testa pe toate. În zilele noastre, cu calculatoare de

buzunar, calculatoare şi supercalculatoare, s-au făcut miliarde şi miliarde de încercări şi, de fiecare dată, s-a ajuns la implacabilul 4, 2, 1.

Fiecare e liber să încerce să demonstreze că e vorba despre o regulă generală. Aşa se crede, dar nimeni nu ştie s-o demonstreze: e o conjectură. Matematica e democratică, şi oricine va reuşi să demonstreze sau să infirme conjectura asta va fi întâmpinat ca un erou.

E sigur că nu eu voi încerca: în afară de faptul că pare îngrozitor de dificilă, nu se potriveşte cu mintea mea care nu e antrenată să analizeze asemenea probleme.

*

```
Date: Mon, 4 May 2009 17:25:09 -0500
From: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
To: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
Subject: Backus

Uite articolul lui Backus din JMP 1960 (Vol.1, No.3,
pacat ca n-a fost Vol.1, No.1, ar fi fost si mai
fain).
E fantastic! Uita-te la penultima sectiune din
articolul lui Backus, apoi la ultima fraza a
articolului! E cu atat mai remarcabil cu cat nu
stiu pe nimeni care sa fi exprimat explicit asemenea
dubii pana la articolele din ultimii ani…

Numai bine
Cedric


From: Clement Mouhot
<clement.mouhot@ceremade.dauphine.fr>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Date: Sun, 10 May 2009 05:21:28 +0800
Subject: Re: Backus
```

Am citit un pic articolul lui Backus in avion. Intr-adevar, e foarte interesant, intelesese bine pb cazului liniar si problema cresterii in timp a termenului de background de indata ce depinde de spatiu, prin filamentare. Si in general e remarcabil de riguros fata de „standardul‟ articolelor despre Landau damping… Trebuie sa-l adaugam la citari, mai ales cu discutia sa numerica de la pagina 190 si cu concluzia cu dubiile privind validitatea neliniara a studiului liniar: intareste una dintre dificultatile conceptuale ale introducerii noastre.

Numai bine, Clement

Capitolul 31

Princeton, într-o frumoasă seară de mai 2009

În mai, la Institute for Advanced Studies, copacii înfloresc, e o minune.

Noaptea abia s-a lăsat, rătăcesc singur prin întuneric, bucurându-mă de obscuritate, de senzația de pace, de dulceața aerului.

Elev la École Normale Supérieure, îmi plăcea să umblu noaptea pe culoarele în beznă ale internatului, doar câteva raze de lumină filtrând de sub uşi, ca vagile luminiscențe pe care ți le imaginezi trecând prin hublourile unui submarin din Jules Verne.

Dar aici, cu iarba şi cu briza, e incomparabil. Sunt şi lumini, dar nu lumini civilizate, sunt luminile naturale ale licuricilor, nenumărate stele pulsante aruncate în iarbă.

Şi îmi amintesc că, într-un articol pe care l-am citit, teoria amortizării Landau e aplicată tocmai licăririi licuricilor.

Fir-ar să fie, Cédric! Mai lasă naibii amortizarea Landau! I-ai dat deja atâtea zile şi nopți. Bucură-te şi tu de licurici fără să-ți mai pui întrebări.

Ia te uită! Cine se plimbă la ora asta pe-aici? Recunosc silueta asta… Ce chestie! Vladimir Voevodsky, matematician rus, printre cei mai străluciți din generația lui, Medalie Fields în 2002, unul dintre moştenitorii spirituali ai lui Grothendieck. E genul de întâlnire neplăcută pe care o poți avea seara târziu la Princeton.

Şi Voevodsky e la plimbare. *Walking, just walking, walking for air*, fără nici un scop, ca pietonul lui Ray Bradbury.

Intrăm în vorbă. E greu de imaginat cineva care să facă o matematică mai diferită de a mea decât Voevodsky. Nu pricep o iotă din preocupările lui, reciproca fiind probabil la fel de adevărată. Dar, decât să încerce să-mi povestească despre ce a făcut, îmi vorbeşte despre visurile lui, despre un subiect care-l pasionează şi în care are de gând să se implice cu totul, limbajele expert şi demonstraţiile automate.



Vladimir Voevodsky

Vorbeşte despre celebra Teoremă a celor Patru Culori, despre demonstraţia ei controversată pentru că folosirea informaticii a făcut-o inumană, dar care a fost recent bulversată de cercetătorii francezi de la INRIA cu ajutorul limbajului expert Coq.

Vladimir crede că, într-un viitor nu foarte îndepărtat, programele de informatică vor putea verifica raţionamente lungi şi complexe, spune că deja se experimentează, în Franţa, pe rezultate celebre. La început sunt sceptic, dar cel cu care vorbesc nu e doar o minte înfierbântată, e un om de ştiinţă de cel mai înalt nivel, ce spune trebuie luat în serios.

Eu nu m-am atins niciodată de asemenea probleme, iar algoritmica aproape n-am practicat-o. Algoritmii de mariaj (*bipartite matching*), simplex, de licitație joacă un rol important în simularea numerică a transportului optimal în care sunt specialist; dar e o perspectivă complet diferită de cea despre care îmi vorbește Vladimir. Domeniul ăsta nou e foarte tentant, sunt atâtea lucruri pasionante de studiat.

Flori, limbaje, patru culori, împerechere… Toate ingredientele pentru un cântec frumos… Numai să nu fi fost deja compus…

*

Pe la 1850, matematicianul Francis Guthrie a colorat harta comitatelor Angliei, având mare grijă ca oricare două comitate cu o porțiune de frontieră comună să aibă culori diferite. Câte creioane colorate urma să folosească?

Guthrie și-a dat seama că-i sunt de ajuns patru culori. Și și-a zis că e posibil să fie de ajuns patru pentru a colora orice hartă *– una care conține, desigur, țări care nu sunt ele însele împărțite în zone separate.*

Trei culori nu ajung: luați harta Americii de Sud și uitați-vă la Brazilia, Argentina, Bolivia și Paraguay, fiecare dintre ele le atinge pe celelalte trei, vă trebuie deci cel puțin patru culori diferite.

Dar patru sunt de-ajuns, vă puteți convinge colorând harta dumneavoastră preferată. Sau, cel puțin, puteți testa afirmația pe o mulțime de exemple. Dar cum să arăți că e adevărat pentru orice hartă? N-ai cum să le testezi pe toate, sunt o infinitate! E nevoie de un raționament logic, și nu e ușor.

În 1879, Kempe credea că a demonstrat rezultatul. Dar demonstrația era greșită, el arătase doar faptul că cinci culori sunt de-ajuns.

S-o luăm încet. Știm s-o facem pentru o hartă cu patru țări. De-aici la cinci, se trece ușor. Apoi pentru șase. Putem continua?

Să zicem că ştim să colorăm cu patru culori toate hărţile cu 1 000 de ţări şi că vrem să ne apucăm de o hartă cu 1 001 de ţări. Cum procedăm? Pentru început, putem arăta că printre cele 1 001 de ţări, există măcar una care are vecini puţini, să zicem maxim 5. Dacă ne concentrăm asupra acestei ţări şi a vecinilor ei, colorăm uşor; şi dacă ne jucăm de-a cuceritorii, făcând câteva fuziuni şi recombinări în sânul acestui grup de ţări, ne vom afla în faţa unei hărţi cu mai puţin de 1 000 de ţări, deci vom şti cum să colorăm. Bună idee! Dar e greu să potrivim colorarea locală cu cea globală, trebuie avute în vedere foarte multe cazuri: milioane, ba chiar miliarde!

În 1976, Appel şi Haken au redus problema la o mie de configuraţii care trebuiau testate şi le-au trecut în revistă pe toate cu ajutorul unui program informatic. După ce maşina a lucrat timp de două luni, au tras concluzia că patru culori sunt întotdeauna de ajuns, rezolvând o conjectură mai veche de un secol.

În faţa acestei demonstraţii, comunitatea matematică a fost profund divizată. Oare maşina nu a ucis reflecţia? Înţelegem cu adevărat argumentul acesta care alimentează o fiinţă din siliciu şi circuite integrate? Appel-Haken-arzii şi anti-Appel-Haken-arzii se războiesc fără a putea ajunge la consens.

Oamenii s-au obişnuit cu polemica asta. Acum facem un salt în timp, pentru a reveni în Franţa, la INRIA (Institutul Naţional de cercetare în Informatică şi Automatică), la cumpăna mileniilor. Georges Gonthier, specialist în limbaje de verificare a demonstraţiilor, e cercetător la acest institut specializat în informatică şi calcul. Domeniul său a fost dezvoltat în Europa de câţiva teoreticieni visători, cam în aceeaşi perioadă în care Appel şi Haken erau cap de afiş. Limbajele acestea verifică o demonstraţie matematică aşa cum se testează soliditatea unui arbore, ramură cu ramură: imaginaţi-vă un arbore logic care conţine raţionamentul şi poate face obiectul unei verificări automate, pe modelul unui corector ortografic.

Dar, în timp ce un corector ortografic ia în calcul doar cuvintele individuale, programul care analizează demonstrațiile verifică dacă ansamblul e coerent, are grijă ca totul să fie corect.

Cu ajutorul unui colaborator, Benjamin Werner, Gonthier se hotărăşte să se înhame la demonstrația Teoremei celor Patru Culori într-un limbaj numit Coq, în onoarea creatorului său, Thierry Coquand. Spre deosebire de programele folosite de Appel şi Haken, Coq e certificat: se ştie că nu poate produce erori. În plus, Coq nu furnizează calcule, ci generează automat demonstrația plecând de la algoritmul care îi este impus. Gonthier îl foloseşte ca să rescrie partea „lizibilă" a demonstrației şi obține ceva simplu şi eficient, ceva frumos! O demonstrație scrisă de o ființă omenească în proporție de 0,2%, completată de maşină până la 100% – dar cel mai mult contează cele 0,2% umane, datorită lui Coq ştim că putem avea încredere în celelalte părți.

Lucrările lui Gonthier şi ale colegilor săi prefigurează softurile de validare care, într-un viitor nu foarte îndepărtat, vor putea verifica automat programele complexe care guvernează lansarea rachetelor, zborul avioanelor sau microprocesoarele de pe laptopurile noastre. Miza financiară a ceea ce acum treizeci de ani nu era decât o dulce visare se socoteşte azi în miliarde de euro.

Cât despre neobositul Gonthier, s-a lansat acum într-un proiect extrem de ambițios, verificarea unor teoreme de clasificare a grupurilor finite ale căror demonstrații sunt cunoscute ca unele dintre cele mai lungi din secolul XX.

*

Un cuvânt scrâşnind
Printre dinți scuipat
Şi-n lume se-aprind
Flăcări ca în iad

Guri se cască mare
Scot vorbe mieroase
Pielea-i de vânzare
De pe tobe roase

Când în nou limbaj
Vom vorbi de flori
Şi de mariaj
De patru culori
Tu vei înțelege
Limba dragostei
Eu s-aştept voi merge
Lângă Turnul ei

Între timp, Cain îl tot vânează pe Abel
Dar eu am construit cu mâinile mele Turnul din Babel

Turnul din Babel (extras), Guy Béart

Capitolul 32

Princeton, 26 iunie 2009

E ultima mea zi la Princeton. A plouat atât de mult în ultimele săptămâni, ca-ntr-o comedie bufă. Dar astă-seară, cerul s-a degajat şi pot să mă plimb din nou. Licuricii transformă copacii cei mari în romantici brazi de Crăciun împodobiți cu nenumărate lumânărele sclipitoare. Ciuperci uriaşe, un iepuraş sperios, silueta unei vulpi care se decupează o clipă în noapte, cerbi al căror boncăluit te înfioară.

În ultima vreme s-au întâmplat multe pe frontul amortizării Landau! Am reuşit în sfârşit să facem demonstrația să stea în picioare, am recitit totul. Ce emoție când ne-am pus articolul *on line* pe Internet! Am putut în fine să controlăm modul zero, iar Clément a descoperit că puteam renunța complet la artificiul pe care-l introdusesem la întoarcerea de la Muzeul de Istorie Naturală, dublul decalaj temporal. Dar tot n-aveam inimă să luăm totul de la capăt; şi-apoi, ne-am zis că trucul ar putea fi util în alte probleme, aşa că l-am lăsat, oricum nu făcea rău nimănui… Va fi oricând posibil să mai simplificăm, la nevoie.

Am expus lucrările noastre în multe locuri; de fiecare dată am reuşit să îmbunătățesc rezultatele şi prezentarea, acum e bine rodată şi e solidă. Se poate să mai fie vreun *bug* pe undeva, dar acum totul se leagă atât de bine, încât sunt încrezător: dacă se descoperă o eroare, nu poate fi gravă, o vom putea repara.

La Princeton Plasma Physics Laboratory, am vorbit timp de două ore în fața unui public de fizicieni, apoi am avut

dreptul la o minunată vizită a instalațiilor şi a locurilor unde îşi fac ei experiențele, în acest institut unde se încearcă descifrarea misterelor plasmei şi – cine ştie? – stăpânirea fuziunii nucleare.

La Minneapolis, expunerea mea l-a impresionat foarte tare pe Vladimir Šverák. Îl respect enorm pe acest om care a înțeles misterioasa noțiune de cvasiconvexitate mai bine decât oricine altcineva şi care e acum unul dintre cei mai buni specialişti în regularitatea Navier-Stokes; cuvintele lui calde mi-au dat multă încredere.

În plus, la Minneapolis am făcut o cucerire: foarte tânăra, foarte blonda şi foarte timida fetiță a colegului meu Markus Keel a binevoit să se joace cu mine în timpul banchetului colocviului, mergând până la a se da peste cap râzând în hohote. Lui Markus nu-i venea să creadă că fetița lui, care nu vorbeşte niciodată cu necunoscuți, a acceptat o asemenea fraternizare cu un străin.

Mi-am prezentat din nou rezultatele şi la Rutgers, la unul din colocviile de fizică statistică ale neobositului Joel. Dar de data asta a fost complet diferit față de precedentul expozeu, acum era ceva solid!

La Princeton, am făcut o expunere în fața unei săli pline ochi numai cu fete, sau aproape, în cadrul programului „Women in Mathematics". Aceste Tinere Matematiciene vin în număr mare, în speranța de a înlătura blestemul care face din matematică o disciplină preponderent masculină – ce-i drept, mai puțin decât informatica sau ingineria electrică. Poate că printre ele se află urmaşele marilor matematiciene care au făcut să viseze generații la rând, Sofia Kowalevskaya, Emmy Noether, Olga Oleinik sau Olga Ladîjenskaia. Tinerele care au invadat campusul aduc un aer de prospețime, unele au rămas până seara, era deja răcoare şi ele se plimbau în grupuri mici.

Aseară am mers cu toții să ne luăm rămas-bun de la terenul de golf. Ce mult îmi plăcea, când mă-ntorceam de la vreo

conferință, pe drumeagul care duce de la gara mică până la Institut, să traversez terenul ăsta, singur în noapte, sub razele lunii care preface colinele în valuri fantomatice… Copiii au depus cu religiozitate pe jos o comoară prețioasă: toate mingile de golf pierdute pe care le-au adunat de când au ajuns aici. S-au şi făcut şase luni!

Starea mea de grație matematică a durat tot timpul sejurului la Princeton. După ce am rezolvat problema amortizării Landau, am revenit la celălalt mare program în desfăşurare, cu colaboratorii mei Ludovic şi Alessio, şi iarăşi, atunci când totul părea compromis, am reuşit să trecem peste toate obstacolele şi, ca prin farmec, totul s-a pornit să funcționeze. Printr-un adevărat miracol, un calcul enorm de cincisprezece termeni care s-au combinat pentru a forma un pătrat perfect… un miracol pe cât de nesperat, pe atât de neaşteptat, pentru că, în definitiv, am demonstrat exact contrariul a ce credeam că vom demonstra!

Dar în amortizarea Landau n-am demonstrat chiar totul: pentru interacțiile electrostatice sau gravitaționale, cele mai interesante, am arătat că amortizarea apare după un timp uriaş, dar nu infinit. Şi cum aici nu prea avem loc de-ntors, e impusă şi regularitatea aşa că nu reuşim să ieşim din cadrul analitic. La sfârşitul expunerilor mele, revine adesea una sau alta din următoarele două întrebări: *Dar în cazul interacțiilor coulombiene ori newtoniene, avem şi acolo amortizare în timp finit? Se poate renunța la ipoteza de analiticitate?* De fiecare dată răspund că nu voi spune nimic în absența avocatului meu, că adevărul e că nu ştiu dacă e ceva profund sau am fost noi prea puțin dibaci.

Oh, uite o Tânără Matematiciană care hoinăreşte de una singură, la fel ca mine, şi e bucuroasă să mă însoțească pentru restul plimbării. A asistat la conferința mea despre transportul optimal, e o bună introducere, o să vorbim despre matematică în blânda noapte princetoniană.

Plimbarea e gata, trebuie să mă întorc la Institut. Biroul meu e aproape gol, mai e doar teancul de ciorne, teancul enorm, înnegrit în fiecare zi cu toate încercările avortate şi reuşite, toate versiunile intermediare pe care le-am scris îngrijit, le-am imprimat degrabă şi le-am corectat cu furie.

Le-aş fi luat pe toate, dar ar fi greu cu ele în avion, suntem şi-aşa foarte încărcaţi! Trebuie deci să arunc tot…

Văzându-mă contemplând ciornele care tind să ocupe tot locul, Tânăra Matematiciană înţelege imediat mica dramă a aruncării acestui teanc de foi îmbibate de emoţii. Mă ajută să îndes totul în coşul pentru hârtii.

Mai degrabă, de jur-împrejurul coşului – ar fi de-ajuns ca să umpli patru coşuri!

Gata, sejurul meu la Princeton chiar a luat sfârşit.

*

Am fost foarte multă vreme circumspect faţă de principiul conferinţelor tinerelor matematiciene... asta până când am participat chiar eu la una, ca orator, ediţia 2009 a programului „Femei în matematică“, organizat în fiecare an la Institute for Advanced Studies din Princeton. Ambianţa dinamică şi entuziastă care scălda această manifestare mi-a lăsat o amintire greu de uitat. Vă urez să purtaţi dezbaterile şi discuţiile celui de-al „nouălea forum al tinerelor matematiciene la Institutul Henri Poincaré“ într-o atmosferă la fel de destinsă şi studioasă. Fiţi bine-venite în „Casa Matematicienelor“!

(Cuvânt de bun-sosit la Forumul Tinerelor Matematiciene, întâmpinate la Institutul Henri Poincaré de directorul lui pe 6 noiembrie 2009.)

Capitolul 33

Lyon, 28 iunie 2009

Ce ciudat să revii la matcă după atâta vreme!

N-am simțit că ne-am întors cu adevărat decât după ce am fost la piață. Ne-am regăsit negustorii, ne-am ales pâinea şi brânzeturile, ne-am mirat să auzim numai franceză în jur. Mi-au dat lacrimile când am băut un pahar de lapte nepasteurizat, primul după şase luni. Frageda *ciabatta* şi bagheta crocantă nu mai au nevoie de comentarii.

M-am întors în elementul meu, dar nimic nu mai e ca înainte. Sigur, au fost meşteri care au lucrat cât timp am fost plecați, şi abia mai recunoaştem apartamentul… Dar asta nu-i nimic; mai importantă e metamorfoza mea lăuntrică. Munca de la Princeton m-a transformat, ca pe un alpinist care, când coboară la sol, are mintea încă plină de înălțimile pe care le-a explorat. Hazardul mi-a deviat traiectoria ştiințifică până la un punct de neimaginat acum şase luni.

Anii 1950 au fost martorii unei revoluții ştiințifice, atunci când s-a înțeles că, pentru a explora un sistem prea bogat în posibilități, e adesea preferabil să te deplasezi la întâmplare în loc să-l caroiezi metodic ori să alegi eşantioane succesive într-o manieră perfect aleatoare. Era algoritmul Metropolis-Hastings, azi e întreg domeniul MCMC, Monte Carlo Markov Chains, a cărui eficacitate, dincolo de orice aşteptări raționale în fizică, chimie sau biologie, încă n-a fost explicată. Nu e o explorare deterministă, nu e nici una complet aleatoare, e o explorare printr-o avansare întâmplătoare.

De fapt, nu e ceva nou, aşa-i şi-n viață: trecând un pic la întâmplare de la o situație la alta, explorăm cu atât mai multe posibilități, ca un cercetător care-şi schimbă continentul ştiințific în funcție de întâlniri.

Toate s-au întors la locul lor, toate se vor porni din nou. Lucrurile mele sunt deja aranjate în cutii, foarte curând, firma de mutări va lua tot ce mi-e familiar. Futonul* pe care mama l-a comparat cu betonul armat după ce l-a încercat. Linia muzicală care, la vârsta ei de cincisprezece ani, îşi merită din plin eticheta de *high fidelity*. Sutele de CD-uri care-mi mâncau uneori întreg salariul de normalian, casetele recuperate şi vinilurile de ocazie. Şi biroul dublu, mare, din lemn masiv, bibliotecile coloniale în care se înghesuie cărți nenumărate, fotoliul greu de lemn dintr-o singură bucată, adus de la Londra, sculpturile cumpărate în Drôme, tablourile bunicului… Toate mă vor însoți în noua aventură: peste trei zile îmi încep mandatul de director al Institutului Henri Poincaré din Paris. Predecesorul meu eliberează biroul pe 30 iunie, eu mă instalez pe 1 iulie. Va trebui să învăț ce am de făcut la fața locului, începe o nouă perioadă din viața mea.

*

Un nou pas din MCMC-ul personal.

*

După o lungă eclipsă în anii 70 şi 80, IHP, „Casa Matematicii“, renaşte în mod oficial în 1990. Statul investeşte masiv în renovarea sa, în cadrul unui contract cvadrienal încheiat cu Universitatea Pierre şi Marie Curie, însărcinată cu gestiunea noului IHP, şi cu sprijinul CNRS.

Noua structură începe să funcționeze sub direcția matematicianului Pierre Grisvard, care moare prematur în 1994,

* Saltea care se pune direct pe podea. (*N. t.*)

la câteva luni după ce ministrul învățământului superior şi al cercetării inaugurase oficial institutul. Îi urmează Joseph Oesterlé (Universitatea Pierre şi Marie Curie), apoi Michel Broué (Universitatea Denis Diderot) în 1999, apoi Cédric Villani (Şcoala Normală Superioară din Lyon) în 2009.

(Extras dintr-o notă de sinteză despre Institutul Henri Poincaré.)

Capitolul 34

Praga, 4 august 2009

Praga, oraşul Europei mitice – dacă există aşa ceva. Legenda Golemului, cântecul lui Messia, biografia lui Kafka desenată de Crumb şi Mairowitz, toate acestea şi multe altele încă îmi răsună-n minte în timp ce străbat străzi pe care orologii milenare se învecinează cu barurile pline de dansatoare sumar îmbrăcate şi unde studenții se duc să danseze costumați în cape de supereroi sau cu coarne de diavoli.

Acum câteva săptămâni, pe drumul dinspre Oberwolfach, trecătorii făceau ochii mari la vederea costumului meu; la Praga, aş putea trece drept expert contabil.

Ieri s-a deschis Congresul Internațional de Fizică Matematică, organizat de asociația cu acelaşi nume. Am fost patru cei care am primit, cu tot fastul, premiul Henri Poincaré, cu siguranță cea mai înaltă distincție internațională în fizica matematică. În afara austriacului Robert Seiringer (categoria junior, ca şi mine), printre laureați mai erau elvețianul Jürg Frölich şi rusul Yakov Sinai. Aceşti specialişti în mecanica cuantică şi clasică, în fizica statistică şi în sisteme dinamice sunt cu toții prieteni, iar clarvăzătorul Joel Lebowitz i-a integrat de mult pe toți în comitetul editorial al *Journal of Statistical Physics* pe care-l conduce. Sunt fericit şi mândru să mă aflu în asemenea companie.

Primirea acestui premiu îmi dă dreptul la o conferință plenară la Congres, chiar dacă inițial nu fusesem programat. Cu toate că am primit premiul Poincaré pentru lucrările despre

Boltzmann, am ales să vorbesc despre amortizarea Landau: e o ocazie nesperată să fac cunoscute rezultatele recente în fața celei mai bune audiențe imaginabile de fizică matematică.

Cu trei minute în urmă, înainte să încep conferința, inima îmi bătea nebunește iar prin vene îmi curgeau şuvoaie de adrenalină. Dar, de îndată ce-am început să vorbesc, m-am liniştit şi am devenit sigur de mine.

— It so happens that I was appointed Director of the Institut Henri Poincaré, at the same time that I receive the Henri Poincaré prize. This is just a coincidence, but I like it…

Expunerea, pregătită cu multă grijă, se desfăşoară bine, termin la fix.

— …To conclude, let me note the nice coincidence! In order to treat the singularity of the Newton interaction, you use the full power of the Newton scheme. Newton can be proud! This is just a coincidence, but I like it.

Primirea e triumfală, în unele priviri citesc un amestec de uimire şi admirație, cu o umbră de teamă – trebuie spus că demonstrația intimidează, chiar şi pe mine mă depăşeşte!

Şi-apoi sunt fetele, tinerele din Praga, înainte de conferință se uitau la mine fără să-mi dea prea mare atenție – după, e cu totul altceva, se înghesuie, mă felicită pentru claritatea expunerii; una dintre ele recită emoționată, într-o franceză ezitantă, un mic compliment.

Sigur, revin şi întrebările obişnuite, aceleaşi de fiecare dată. Se poate relaxa regularitatea analitică? La o interacție newtoniană, nu se poate ajunge la timp infinit? Dar asta nu-l îngrijorează pe prietenul meu portughez, Jean-Claude Zambrini, care, la sfârşitul expunerii, îmi şopteşte: „Dacă tot atragi tu coincidențele, Cédric, tot ce ți se poate ura acum e să obții o invitație la Fields Institute!"

Institutul Fields – care nu joacă nici un rol în atribuirea medaliilor omonime – are sediul la Toronto şi organizează cu regularitate colocvii pentru tot felul de matematicieni.

Mă amuz cu Jean-Claude… dar după doar o lună, pură coincidență!, invitația soseşte.

*

Date: Tue, 22 Sep 2009 16:10:51 -0400 (EDT)
From: Robert McCann <mccann@math.toronto.edu>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Fields 2010

Dear Cedric,

Next fall I am involved in organizing a workshop on
‟Geometric Probability and Optimal Transportation‟
Nov 1-5 as part of the Fields Theme Semester on
‟Asymptotic Geometric Analysis‟.
You will certainly be invited to the workshop, with
all expenses covered, and I hope you will be able
to come. However, I also wanted to check whether
there is a possibility you might be interested in
visiting Toronto and the Fields Institute for a
longer period, in which case we would try to make
the opportunity attractive.
Please let me know.

Robert

Capitolul 35

New York, 23 octombrie 2009

În Franța, copiii fac cunoştință cu puiul de mistreț prins de unchiul lor cu mâinile goale. Ce mult mi-ar fi plăcut să-l văd!

Dar am preferat să-mi folosesc vacanța ca să fac loc unui foarte obositor turneu american care mă duce de-a lungul şi de-a latul Statelor Unite în doar câteva zile. Am trecut deja prin Boston, ca să vizitez MIT (pe urmele lui Wiener şi Nash!) şi Universitatea Harvard. Acum sunt la New York. Mă consolez spunându-mi că, de îndată ce mă voi întoarce în Franța, am să merg să văd puiul de mistreț şi am să-l duc la plimbare în pădure.

E seară, îmi deschid poşta electronică. Îmi sare inima: un mesaj de la *Acta Mathematica*, o revistă de cercetare matematică pe care mulți o consideră drept cea mai prestigioasă dintre toate. Aici am propus spre publicare, Clément şi cu mine, monstrul nostru de 180 de pagini. Sigur despre asta e mesajul.

Dar… l-am trimis acum mai puțin de patru luni! Ținând cont de mărimea manuscrisului, e mult prea devreme ca referenții să-şi fi dat avizul şi ca editorii să fi luat o decizie pozitivă. O singură explicație posibilă: revista ne scrie pentru a anunța că articolul e respins.

Deschid mesajul, citesc în diagonală, mă uit febril pe rapoartele experților. Strâng din dinți şi le mai citesc o dată. Şase rapoarte, în mare foarte pozitive, foarte orice, dar… da, ca-ntotdeauna, îi îngrijorează analiticitatea şi cazul limită la

timp mare. De fiecare dată, aceleaşi două întrebări cărora a trebuit deja să le răspund de zeci de ori în expunerile pe care le-am făcut, şi din pricina cărora, iată, acum mi se respinge manuscrisul! Editorul nu e convins că rezultatele sunt definitive, iar articolul e atât de lung, încât se vede nevoit să fie încă mai intransigent decât de obicei.

Ce nedreptate! În ciuda noutății conținute în articol, a defrişării complete a subiectului? Am trecut peste atâtea obstacole tehnice, am petrecut atâtea nopți nedormite… şi tot nu e destul de frumos pentru ei?? Sunt bolnav!

Ia te uită… un alt mesaj mă anunță că am câştigat premiul Fermat. După numele matematicianului francez Pierre de Fermat, prințul amatorilor, care, în secolul XVII, înfuria toată Europa cu enigmele sale matematice. A revoluționat teoria numerelor, calculul variațiilor şi calculul probabilităților; azi, premiul Fermat e primit o dată la doi ani de unul sau doi cercetători care încă n-au împlinit 45 de ani şi care au contribuții majore în unul dintre aceste domenii.

Vestea acestui premiu face să-mi sară inima din piept, dar tot nu ajunge ca să compenseze frustrarea de a-mi vedea articolul respins. Ca să mă aline, aş avea nevoie măcar de o îmbrățişare caldă.

*

În 1882, matematicianul suedez Gösta Mittag-Leffler îşi convingea colegii nordici să înființeze împreună o revistă scandinavă de matematică, dedicată cercetării la nivel înalt. Avea să fie Acta Mathematica, *al cărei redactor-şef urma să devină Mittag-Leffler.*

Comunicând regulat cu cei mai buni matematicieni din lume, înzestrat cu un gust foarte sigur şi cu o bună doză de îndrăzneală, Mittag-Leffler a reuşit repede să atragă cele mai bune articole de matematică ale momentului. În manejul său de autori, mânzul preferat e, cu siguranță, genialul şi imprevizibilul

Henri Poincaré, căruia lui Mittag-Leffler nu-i e frică să-i publice lungi articole revoluționare.

Episodul cel mai celebru din viața revistei coincide cu unul dintre episoadele cele mai celebre din cariera lui Poincaré. La sfatul lui Mittag-Leffler, regele Oscar al II-lea al Suediei lansase un mare concurs de matematică, pe o temă la alegere dintr-o listă scurtă. Poincaré acceptase provocarea şi alesese să trateze subiectul stabilității sistemului solar, problemă rămasă deschisă încă de la Newton! Într-adevăr, dacă Newton scrisese ecuațiile planetelor din sistemul solar (planetele sunt atrase de Soare şi se atrag unele pe altele), a fost incapabil să arate că aceste ecuații atrag după ele stabilitatea sistemului solar, sau să decidă că, dimpotivă, ele conțin o catastrofă anunțată – ciocnirea planetelor, cine poate şti? În fizica matematică, toată lumea cunoaşte această problemă.

Newton credea că sistemul e stabil în mod intrinsec, şi că stabilitatea pe care o observăm se datorează unei miloase mâini divine. Dar, mai târziu, Laplace şi Lagrange, apoi Gauss, au arătat că sistemul lui Newton e stabil într-un timp uriaş, poate un milion de ani, mult mai mult decât credea chiar Newton. Era pentru prima dată în istoria omenirii când comportarea astrelor la o scară de timp mult superioară tuturor arhivelor ținute vreodată era prezisă din punct de vedere calitativ!

Dar întrebarea rămânea: dincolo de acest timp uriaş, catastrofa se poate produce sau nu? Peste nu unul, ci o sută de milioane de ani, nu riscă Marte şi Pământul să se ciocnească? În spatele acestei probleme se află întrebări fundamentale privind fizica în general.

Poincaré nu tratează sistemul solar complet – era prea complicat! În schimb, consideră un sistem solar redus şi idealizat, numărând numai două planete care se rotesc în jurul Soarelui, una dintre ele fiind minusculă în raport cu cealaltă.

Într-un fel, ca şi cum am uita de toate planetele în afara lui Jupiter şi a Pământului… Poincaré a studiat problema asta epurată, a simplificat-o şi mai mult, până a ajuns la miezul ei viu. A inventat metode noi cu ocazia asta şi a demonstrat stabilitatea veşnică a acestui sistem redus!

Realizarea aceasta i-a adus gloria şi recompensa regelui Oscar.

Manuscrisul câştigător urma să fie publicat în Acta Mathematica. *Dar asistentul care edita textul avea probleme cu câteva pasaje mai confuze din soluția lui Poincaré. Nimic mai banal: toată lumea ştia că Poincaré nu era un model de claritate. I-a comunicat nedumeririle sale monumentului matematicii franceze.*

Până să-şi dea seama Poincaré că în demonstrația lui se strecurase o eroare gravă, articolul era deja publicat! O erată nu mai era de-ajuns, rezultatele din articol erau contaminate în profunzime.

Netulburat, Mittag-Leffler retrage toate exemplarele publicate deja, unul câte unul, sub diverse pretexte futile, înainte să-şi dea seama cineva de eroare. Topeşte totul, sau aproape totul. Cheltuielile au fost plătite de Poincaré – l-a costat mai mult decât primise de la regele Oscar!

Ce face povestea extraordinară e că Poincaré şi-a transformat eroarea în act fondator. A reuşit să refacă totul, şi-a schimbat concluziile, a descoperit că demonstrase contrariul concluziei în care crezuse: instabilitatea e posibilă!

Corectat, republicat, articolul a fost textul fondator al teoriei sistemelor dinamice, o teorie cu care se ocupă azi mii de cercetători din toată lumea. Teoria haosului, efectul fluture, toate acestea se găsesc, în germene, în articolul lui Poincaré. Ceea ce ar fi putut fi un dezastru a devenit, pentru Acta Mathematica*, un triumf.*

Gloria revistei nu a încetat să sporească, şi ea a devenit una dintre cele mai prestigioase, poate chiar cea mai prestigioasă

din lume. Azi, dacă reuşeşti să strecori un articol de cercetare în cele 600 de pagini publicate anual de revista asta, ai aproape asigurat viitorul profesional în comunitatea matematică.

În 1912, la moartea sa, Poincaré a fost omagiat ca un erou național. În 1916, locuința lui Mittag-Leffler a fost transformată într-un centru internațional de cercetări, unde matematicieni veniți din toate colțurile lumii să poată să discute şi să reflecteze împreună la noi probleme. A fost Institutul Mittag-Leffler, primul de acest fel, încă în activitate şi azi. În 1928, la Paris a fost înființat un al doilea centru, construit pe aceleaşi principii de melanj internațional, acordând un loc de cinste cursurilor la nivel de cercetare: Institutul Henri Poincaré.





Henri Poincaré & Gösta Mittag-Leffler

Capitolul 36

Ann Arbor, 27 octombrie 2009

În camera de hotel din Ann Arbor. Petrec câteva zile la Universitatea din Michigan – o universitate mare, cu câțiva matematicieni de prim rang.

Clément a fost tare amărât de refuzul de la *Acta Mathematica*, ar vrea să încercăm să-i convingem să revină asupra deciziei, să le explicăm de ce e rezultatul nostru atât de novator şi de important, chiar dacă tot mai rămâne o mică zonă de umbră…

Dar eu cunosc mai bine ca el revistele astea foarte prestigioase. Sunt eu însumi editor la revista concurentă, *Inventiones Mathematicae*, şi ştiu cât de nemilos trebuie să fiu când cântăresc manuscrisele care-mi sunt trimise. Editorii de la *Acta* sunt încă mai insensibili, nimic n-o să-i clintească, cu excepția cazului în care demonstrăm că unul dintre referenți a fost de rea-credință (dar n-avem nici un indiciu că s-ar fi petrecut aşa ceva), sau dacă le aducem noi elemente.

O pistă posibilă ar fi să tăiem acest articol enorm în două, pentru a-l publica mai uşor, dar detest practica asta… Aşa că, deocamdată, suntem în aşteptare.

Expunerile mele la Ann Arbor merg bine, dar apar iar şi iar aceleaşi întrebări. Am discutat cu Jeff Rauch, specialist în ecuații cu derivate parțiale, care a colaborat multă vreme cu francezi. Jeff n-a fost şocat că rezultatul nu funcționează la timp infinit, dar nu i-a plăcut ipoteza de analiticitate. Sigur, alții, dimpotrivă, ar vrea timp infinit şi nu-şi fac probleme cu

analiticitatea, aşa că mi-aş putea spune că nu-i aşa grav; dar am mai multă încredere în judecata lui Jeff, şi critica sa mă pune pe gânduri. Aşa că seara aştern pe hârtie un raționament menit să-i arate că demonstrația noastră e cea mai apropiată de ce ar vrea el şi că nu poate fi în nici un caz îmbunătățită. Ceea ce fac mi-e de altfel destinat şi mie în egală.



Jeff Rauch

Timpul trece, stau în pat şi scriu, scriu, dar tot nu reuşesc să mă conving… Şi dacă eu nu sunt convins, puține şanse să-l conving pe Jeff!

— Şi dacă mă-nşel, dacă estimările mele erau prea grosiere? Totuşi, aici n-am pierdut nimic… aici am pierdut ceva doar dacă şi-a băgat dracul coada… aici e optim… aici ce-am simplificat nu poate decât să amelioreze lucrurile, doar să nu-mi fi făcut farmece…

Îmi petrec demonstrația ca un ciclist care-şi examinează lanțul de la bicicletă, căutând vreo verigă slabă, verific precizia argumentelor de la fiecare etapă.

Şi-aici!?!?!

Asta-i! Aici poate am fost prea neglijent!

Cum se poate?

— Ce-i asta, pentru numele lui Dumnezeu? N-am văzut că modurile se depărtau unele de altele şi comparaţia mea cu suma e prea grosieră? Dacă iau sup faţă de sumă, e clar că o să pierd!! Bun, e adevărat că era înecat în complicaţii tehnice…

Mormăi şi o iau de la-nceput, în minte.

— Aşa… modurile sunt depărtate unele de altele, ponderea se deplasează, dacă le privesc global pierd ceva de speriat!! Păi, atunci, trebuie să le controlez separat!!

Iluminarea s-a produs în pat, cu creionul în mână. Mă ridic şi străbat febril camera, cu ciorna în mână, cu ochii fixaţi pe formulele cabalistice. Soarta articolului se schimbă încă o dată. De data asta, nu mai e vorba despre repararea unei erori, ci de ameliorarea rezultatelor.

— Cum vom folosi asta?

Încă nu ştiu, dar i-am dat drumul, o să reluăm totul. Avem, în sfârşit, o pistă ca să răspundem celor două veşnice obiecţii.

*

Since $\gamma = 1$ is the most interesting case, it is tempting to believe that we stumbled on some deep difficulty. But this is a trap: a much more precise estimate can be obtained by separating modes *and estimating them one by one, rather than seeking for an estimate on the whole norm. Namely, if we set*

$$\varphi_k(t) = e^{2\pi(\lambda t+\mu)|k|}\,|\widehat{\rho}(t,k)|,$$

then we have a system of the form

$$\varphi_k(t) \le a_k(t) + \frac{c\,t}{(k+1)^{\gamma+1}}\,\varphi_{k+1}\left(\frac{kt}{k+1}\right). \qquad (7.15)$$

Let us assume that $a_k(t) = O(e^{-ak}\,e^{-2\pi\lambda|k|t})$. First we simplify the time-dependence by letting

$$A_k(t) = a_k(t)\,e^{2\pi\lambda|k|t}, \qquad \Phi_k(t) = \varphi_k(t)\,e^{2\pi\lambda|k|t}.$$

Then (7.15) becomes

$$\Phi_k(t) \leq A_k(t) + \frac{c\,t}{(k+1)^{\gamma+1}}\,\Phi_{k+1}\left(\frac{kt}{k+1}\right). \qquad (7.16)$$

(The exponential for the last term is right because $(k+1)(kt/(k+1)) = kt$.) Now if we get a subexponential estimate on $\Phi_k(t)$, this will imply an exponential decay for $\varphi_k(t)$.

Once again, we look for a power series, assuming that A_k is constant in time, decaying like e^{-ak} as $k \to \infty$; so we make the ansatz $\Phi_k(t) = \sum_m a_{k,m}\,t^m$ with $a_{k,0} = e^{-ak}$. As an exercise, the reader can work out the doubly recurrent estimate on the coefficients $a_{k,m}$ and deduce

$$a_{k,m} \leq \text{const.}\,A\,(k\,e^{-ak})\,k^m\,c^m\,\frac{e^{-am}}{(m!)^{\gamma+2}},$$

whence

$$\Phi_k(t) \leq \text{const.}\,A\,e^{(1-\alpha)(ckt)^\alpha}, \qquad \forall\alpha < \frac{1}{\gamma+2}. \qquad (7.17)$$

This is subexponential even for $\gamma = 1$: in fact, we have taken advantage of the fact that echoes at different values of k are asymptotically rather well separated in time.

As a conclusion, as an effect of the singularity of the interaction, we expect to lose a fractional exponential on the convergence rate*: if the mode k of the source decays like $e^{-2\pi\lambda|k|t}$, then φ_k, the mode k of the solution, should decay like $e^{-2\pi\lambda|k|t}\,e^{(c|k|t)^\alpha}$. More generally, if the mode k decays like $A(kt)$, one expects that $\varphi_k(t)$ decays like $A(kt)\,e^{(c|k|t)^\alpha}$. Then we conclude as before by absorbing the fractional exponential in a very slow exponential, at the price of a* very large *constant: say*

$$e^{t^\alpha} \leq \exp\left(c\,\varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)e^{\varepsilon\,t}.$$

(Extras din notele mele de curs despre amortizarea Landau.)

Capitolul 37

Aeroportul din Charlotte, 1 noiembrie 2009

În tranzit între Palm Beach şi Providence, pe un aeroport anonim. Am trecut prin corvoada controlului de securitate. Să scape de fierăria de pe el nu-i uşor pentru nimeni, dar când, în plus, porţi butoni la manşetă şi ceas de buzunar cu lanţ, când mai ai în buzunare şi una sau două chei USB şi o jumătate de duzină de stilouri…

Ce viaţă minunată era la Palm Beach, la conferinţa organizată de Emanuel Milman! În câţiva metri, treceai din oraş la plajă. Iar marea, ca o baie caldă. Noaptea, temperatura era ideală şi nu era ţipenie, n-aveai nevoie de costum de baie… exact ca-n cadă! O cadă de dimensiunile oceanului, plus valurile şi nisipul mângâietor. Şi toate astea în noiembrie!

Dar, gata, mă-ntorc la frig. Mulţumită rapidităţii nefireşti a avionului, va fi atât de repede!

Şi dacă în timpul acestei escale la Palm Beach am putut să uit o zi sau două de amortizarea Landau, acum îmi ocupă din nou toate gândurile. Încep să înţeleg ce trebuie făcut ca să ameliorăm totul, prelucrez ce am înţeles în momentul de iluminare de la Ann Arbor. Dar se anunţă enorm! Oare am destulă încredere ca să vorbesc despre asta la Providence, acum, când e încă doar ceva preliminar? Va fi acolo Yan Guo, cel prin care a apărut Problema, va fi o expunere foarte importantă.

Pe ciornă, încep să schiţez ameliorarea, să refac calculele. Ceva îmi sare în ochi: e o chestie care scârţâie, o contradicţie.

— E imposibil să pot demonstra o estimare atât de puternică…

Încă vreo câteva minute şi mă conving că trebuie să fie o eroare în anumite părți complexe ale demonstrației. O fi greşit totul? Aeroportul se învârte cu mine.

Îmi revin. Eroarea, Cédric, nu poate fi prea gravă. Ansamblul articolului funcționează prea bine, eroarea trebuie să fie locală, doar în pasajul ăsta. Şi apare pentru că acest calcul e mascat de cele două shifturi de doi bani, decalajul dublu în timp pe care l-ai introdus la întoarcerea de la Museum! Dar apoi Clément a arătat cum se poate scăpa de ele!! Aşa că trebuie să le elimini, e prea periculos – într-o demonstrație de asemenea complexitate, cea mai mică sursă de neclaritate trebuie eliminată.

Oricum, acest dublu decalaj, dacă nu-l găseam, puteam rămâne blocați de-a binelea. El e cel care ne-a redat speranța, ne-a permis să mergem înainte, chiar dacă apoi am înțeles că putem renunța la el. Şi, până la urmă, să fie greşit?! Mă apuc să rescriu totul cu calm, fără să-l folosesc.

Deocamdată să văd cum prezint lucrurile la Providence. Trebuie să spun că am impresia că am identificat sursa ameliorării, e important, pentru că asta ar răspunde celor două critici care se aduc întotdeauna rezultatului… în acelaşi timp, nu trebuie să trişez, de data asta fără blufuri!

De la Palm Beach la Providence – ce călătorie agitată, până la urmă.

*

Rezervarea dumneavoastră West Palm Beach–Providence

Detaliile zborului: duminică 1 noiembrie 2009
Durata călătoriei: 6h39
Plecare: 15h00
West Palm Beach, PBI (Florida, Statele Unite)
Sosire: 16h53
Charlotte Douglas (Carolina de Nord, Statele Unite)
US Airways 1476 Boeing 737-400 Clasa Economică

Plecare: 16h49
Charlotte Douglas (Carolina de Nord, Statele Unite)
Sosire: 21h39
Providence TF Green Charlotte Douglas (Rhode Island, Statele Unite)
US Airways 828 Airbus Industries A319 Clasa Economică

*

Coulomb/Newton (most interesting cases)

In the proof the Coulomb/Newton interaction and the analytic regularity are **both** critical; but it still works on *exponentially large time* “because”

- the expected linear decay is exponential
- the expected nonlinear growth is exponential
- the Newton scheme converges bi-exponentially

Still it seems possible to go further by exploiting the fact that *echoes at different spatial frequencies are asymptotically rather well separated*

(Extras din expunerea mea de la Brown University, 2 noiembrie 2009.)

Capitolul 38

Saint-Rémy-lès-Chevreuse, 29 noiembrie 2009

Duminică dimineață, mâzgălesc ceva în pat, e un moment privilegiat în viața unui matematician.

Recitesc ultima versiune a articolului nostru, bifez, corectez. Senin ca acum n-am mai fost de multe luni! Am rescris totul. Am eliminat trădătoarele shifturi duble. Am reuşit să exploatăm separarea temporală asimptotică a ecourilor, am schimbat miezul demonstrației, am studiat fiecare mod în parte (înainte, tratam totul global), am relaxat condiția de analiticitate, am inclus şi cazul coulombian în timp infinit, pe care toți nu mai pridideau să ni-l ceară… totul e refăcut, simplificat, recitit, ameliorat, recitit încă o dată.

Toate acestea ar fi putut lua foarte bine trei luni, dar, în stare de exaltare, trei săptămâni au fost de-ajuns.

Recitind detaliile, ne-am întrebat nu o dată cum de am găsit cutare sau cutare artificiu.

Rezultatul e acum mult mai puternic. Cu aceeaşi ocazie, am rezolvat şi o problemă care-i intriga de mult pe specialiştii ca Guo, în termeni tehnici se numeşte „stabilitate orbitală a echilibrelor omogene stabile liniar şi nemonotone".

Am adăugat unele pasaje, dar am şi simplificat prin alte părți, aşa că a ieşit doar cu foarte puțin mai lung decât înainte.

Ne-au parvenit noi simulări numerice. Săptămâna trecută, când am văzut primele rezultate, am sărit până-n tavan: calculele pe care le făcuse Francis cu calculatorul după o rețetă extrem de precisă păreau să fie în perfectă contradicție cu

rezultatele noastre teoretice! Dar nu m-am descurajat, i-am comunicat lui Francis îndoielile mele, şi el a reluat totul cu o altă metodă, care ar fi trebuit să fie încă mai precisă. Când au sosit noile rezultate, de data asta totul se potrivea cu predicția teoretică. Uf! Ceea ce arată încă o dată că înțelegerea calitativă nu poate fi înlocuită de calcule.

Mâine vom fi gata să punem versiunea nouă pe Internet. Iar la sfârşitul săptămânii vom putea retrimite la *Acta Mathematica*, cu şanse de succes mult mai mari.

Într-un ungher al minții, nu mă pot împiedica să mă gândesc la Poincaré însuşi. Unul dintre cele mai celebre articole ale lui a fost respins de *Acta*, corectat şi apoi publicat. Dacă o să mi se-ntâmple acelaşi lucru? E deja un an Poincaré, doar am primit premiul Poincaré şi conduc Institutul Poincaré…

Totuşi, Poincaré… Mare atenție, Cédric, la delirul megaloman.

*

Paris, December 6, 2009

Cédric Villani
École Normale Supérieure de Lyon
& Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F-75005 Paris, FRANCE
cvillani@umpa.ens-lyon.fr

To Johannes Sjöstrand
Editor of Acta Mathematica
IMB, Université de Bourgogne
9, Av. A. Savarey, BP 47870
F-21078 Dijon, FRANCE
johannes.sjostrand@u-bourgogne.fr

Resubmission to *Acta Mathematica*

Dear Professor Sjöstrand,

Following your letter of October 23, we are glad to submit a new version of our paper, On Landau damping, *for possible publication in* Acta Mathematica.

We have taken good note of the concerns expressed by some of the experts in the screening reports on our first submission. We believe that these concerns are fully addresed by the present, notably improved, version.

First and maybe most importantly, the main result now covers Coulomb and Newton potentials; in an analytic setting, this was the only remaining gap in our analysis.

Analyticity is a classical assumption in the study of Landau damping, both in physics and mathematics; it is mandatory for exponential convergence. On the other hand, it is very rigid, and one of the referees complained that our results were tied to analyticity. With this new version this is not so, since we are now able to cover some classes of Gevray data. In the first version we wrote "we claim that unless some new stability effect is identified, there is no reason to believe in nonlinear Landau damping for, say, gravitational interaction, in any regularity clas lower than analytic". Since then we have identified precisely such an effect (echoes occuring at different frequencies are asymptotically well separated). Exploiting it led to the above-mentioned improvements.

As a corollary, our work now includes new results of stability for homogeneous equilibria of the Vlasov-Poisson equation, such as the stability of certain nonmonotone distributions in the repulsive case (a longstanding open problem), and stability below the Jeans length in the attractive case.

Another reservation expressed by an expert was our use of nonconventional functional space. While this may be the case for our "working norm", it is not so for the naive norm

appearing in our assumptions and conclusions, already used by others. Passing from one norm to the other is done by means of Theorem 4.20.

The paper was entirely rewritten to incorporate these improvements, and carefully proofread. To prevent further inflation of the size, we have cut all developments and comments which were not strictly related to our main result; most of the remaining remarks are those intended to just explain the results and methods.

As a final comment about the length of our work, we are open to discussion regarding adjustments of organization of the paper, and we note that the modular presentation of the tools used in our work probably makes it possible for some referees to work in team, thereby hopefully alleviating their task.

We very much hope that this paper will satisfy the experts and remain

Yours truly,

Clément Mouhot & Cédric Villani

ON LANDAU DAMPING

C. MOUHOT AND C. VILLANI

Abstract. Going beyond the linearized study has been a longstanding problem in the theory of Landau damping. In this paper we establish exponential Landau damping in analytic regularity. The damping phenomenon is reinterpreted in terms of transfer of regularity between kinetic and spatial variables, rather than exchanges of energy; phase mixing is the driving mechanism. The analysis involves new families of analytic norms, measuring regularity by comparison with solutions of the free transport equation; new functional inequalities; a control of nonlinear echoes; sharp scattering estimates; and a Newton approximation scheme. Our results hold for any potential no more singular than Coulomb or Newton interaction; the limit cases are included with specific technical effort. As a side result, the stability of homogeneous equilibria of the nonlinear Vlasov equation is established under sharp assumptions. We point out the strong analogy with the KAM theory, and discuss physical implications.

Contents

Keywords. Landau damping; plasma physics; galactic dynamics; Vlasov-Poisson equation.
AMS Subject Classification. 82C99 (85A05, 82D10)

Capitolul 39

Saint-Rémy-lès-Chevreuse, 7 ianuarie 2010

Cititul poştei electronice, imediat după trezire – ca o primă injecţie de drog intelectual uşor.

Printre mesajele noi, colaboratorul meu Laurent Desvilletes îmi trimite o veste tristă: a murit prietenul nostru comun Carlo Cercignani.

Numele lui Cercignani e indisociabil de al lui Boltzmann. Carlo şi-a consacrat viaţa profesională lui Boltzmann, teoriei sale, ecuaţiei sale şi aplicaţiilor ei. A scris trei cărţi de referinţă pe acest subiect; cea publicată în 1975 e prima lucrare de cercetare pe care am citit-o.

În ciuda obsesiei boltzmanniene, Cercignani avea preocupări extrem de diverse. Prin intermediul ecuaţiei lui Boltzmann, a explorat o mulţime de domenii matematice legate, mai mult sau mai puţin strâns, de draga sa ecuaţie.

Şi-apoi, acest om universal, poliglot şi cultivat, nu s-a limitat la ştiinţe: operele sale includ o piesă de teatru, o culegere de poeme şi traduceri din Homer.

Primul meu rezultat important, sau, cel puţin, primul de care sunt cu adevărat mândru, se referea la „Conjectura lui Cercignani". Cu cei douăzeci şi patru de ani ai mei şi cu entuziasmul meu proaspăt, eram invitatul lui Giuseppe Toscani, la Pavia. Giuseppe îmi împărtăşise ideea lui pentru a rezolva faimoasa conjectură, îmi sugerase să încerc în timpul acelei scurte vizite. În câteva ore, am înţeles că ideea lui naivă n-avea nici o şansă să funcţioneze… dar, pe parcurs, am observat un

calcul interesant, un calcul care „suna bine“. Oarecum ca o nouă identitate remarcabilă. Şi, pornind de la el, am lansat o nouă idee; racheta matematică era gata de decolare.

I-am arătat apoi lui Giuseppe cum putem reduce problema lui Cercignani despre producția de entropie în ecuația lui Boltzmann la o estimare a producției de entropie într-o problemă de fizica plasmei pe care, din întâmplare, o studiasem împreună cu Laurent. Iar apoi i-am adăugat un strop de teoria informației, subiect care m-a pasionat întotdeauna. Un concurs de împrejurări incredibil, care nu s-ar fi produs dacă Giuseppe n-ar fi avut ideea lui proastă exact în momentul vizitei mele!

Atunci, *aproape* am rezolvat conjectura şi am prezentat, mai târziu, rezultatele acelea, foarte emoționat, celor mai buni experți în ecuația lui Boltzmann la un colocviu ținut la Toulouse. Ca mulți alții, şi Carlo m-a descoperit tot cu acea ocazie, era încântat şi mi-a spus-o. Cu voce vibrantă, m-a îndemnat foarte serios: „Cédric, prove my conjecture!“

La douăzeci şi patru de ani, era unul dintre primele mele articole. Dar, cinci ani mai târziu, la al douăzeci şi patrulea articol, reveneam asupra problemei cu experiență şi tehnică sporite şi reuşeam, în fine, să demonstrez faimoasa conjectură; Carlo era tare mândru.

Carlo conta pe mine pentru a rezolva câteva dintre problemele cele mai exasperante şi importante care dăinuie în studiul ecuației lui Boltzmann. Asta visam şi eu, dar m-am depărtat pe nesimțite, am luat-o întâi spre transport optimal şi geometrie, apoi către ecuația lui Vlasov şi amortizarea Landau.

Sunt hotărât să revin mai târziu la Boltzmann, dar, chiar dacă mi-aş realiza visurile în ce priveşte ecuația lui, nu voi mai avea bucuria şi mândria de a-i anunța lui Carlo că i-am domesticit monstrul preferat, cel pentru care ar fi dat totul.

*

Conjectura lui Cercignani se referă la legăturile dintre entropie şi producția de entropie dintr-un gaz. Ca să simplificăm,

să uităm de neomogenitățile spațiale ale gazului, în aşa fel încât să conteze numai distribuția vitezelor. Fie deci o distribuție de viteze f(v) *într-un gaz care nu e la echilibru: distribuția nu e egală cu gaussiana* γ(v) *şi, în consecință, entropia nu e atât de mare pe cât ar putea fi. Ecuația lui Boltzmann prezice că entropia va creşte, dar va creşte mult sau foarte puțin?*

Conjectura lui Cercignani afirmă că sporirea instantanee a entropiei e cel puțin proporțională cu diferența dintre entropia gaussienei şi entropia distribuției care ne interesează:

$$\dot{S} \geq K\left[S(\gamma) - S(f)\right].$$

Conjectura are implicații asupra vitezei la care distribuția converge către echilibru, o problemă fundamentală, pentru că e legată de fascinanta descoperire a ireversibilității de către Boltzmann.

La începutul anilor '90, Laurent Desvillettes, apoi Eric Carlen şi Maria Carvalho au lucrat la conjectură şi au obținut rezultate parțiale; dar, chiar dacă au deschis orizonturi complet noi, au fost departe de țel. Iar Cercignani însuşi, cu ajutorul lui Russe Sasha Bobylev, a arătat că acea conjectură era prea optimistă, nu putea fi adevărată... poate numai dacă se luau în calcul ciocniri extrem de puternice, interacții mai dure decât sferele dure, cu o secțiune eficace crescând cel puțin proporțional cu viteza relativă – „sfere foarte dure", cum se spune în jargonul teoriei cinetice a gazelor.

Dar, în 1997, Giuseppe Toscani şi cu mine am demonstrat o limită „aproape" la fel de bună:

$$\dot{S} \geq K_\varepsilon\left[S(\gamma) - S(f)\right]^{1+\varepsilon}$$

unde ε *e oricât de mic, sub anumite ipoteze tehnice asupra ciocnirilor.*

În 2003 am arătat că rezultatul rămâne adevărat pentru toate interacțiile rezonabile; şi, mai ales, am reuşit să arăt că

această conjectură e adevărată atunci când ciocnirile la viteză mare sunt de tipul sferelor foarte dure. Identitatea-cheie, descoperită cu Toscani în 1997, era următoarea:

Dacă $(S_t)_{t\geq 0}$ *e semigrupul asociat ecuației lui Fokker-Planck,* $\partial_t f = \nabla_v \cdot (\nabla_v f + fv)$, *şi* $\mathcal{E}(F,G) :: (F-G)\log(F/G)$, *atunci*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [S_t, \mathcal{E}] = -\mathcal{J},$$

$$\textit{unde } \mathcal{J}(F,G) = \big|\nabla \log F - \nabla \log G\big|^2 (F+G).$$

Identitatea aceasta joacă un rol-cheie în formula de reprezentare

$$\dot{S}(f) \geq K \int_0^{+\infty} e^{-4Nt} \int_{\mathbb{R}^{2N}} (1 + |v - v_*|^2) \times \mathcal{J}(S_t F, S_t G)\, dv\, dv_*\, dt,$$

unde $F(v,v_*) = f(v)f(v_*)$ *şi* $G(v,v_*)$ *este media tuturor produselor* $f(v')f(v'_*)$ *când* (v', v'_*) *descrie toate cuplurile de viteze postcolizionale compatibile cu vitezele precolizionale* (v', v'_*). *Pe formula aceasta se bazează soluția conjecturii lui Cercignani.*



Carlo Cercignani

Theorem *(Villani, 2003). Let* $S(f) = -\int f \log f$ *denote the Boltzmann entropy associated with a velocity distribution* $f = f(v)$*. Let* B *be a Boltzmann collision kernel satisfying* $B(v-v_*, \sigma) \geq K_B(1+|v-v_*|^2)$ *for some constant* $K_B > 0$*, and denote by* $\dot{S}$ *the associated entropy production functional,*

$$\dot{S} = \frac{1}{4} \iiint \Big(f(v')\, f(v'_*) - f(v)\, f(v_*) \Big) \times \log \frac{f'(v)\, f'(v_*)}{f(v)\, f(v_*)}\, B\, dv\, dv_*\, d\sigma.$$

Let $f = f(v)$ *be a probability distribution on* $\mathbb{R}^N$ *with zero mean and unit temperature. Then*

$$\dot{S}(f) \geq \left(\frac{K_B\, |S^{N-1}|}{4\,(2N+1)} \right) (N - T^*(f))\, [S(\gamma) - S(f)],$$

where

$$T^*(f) = \max_{e \in S^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} f(v)(v \cdot e)^2\, dv.$$

Capitolul 40

Paris, 16 februarie 2010

După-amiaza târziu, în marele meu birou de la Institutul Henri Poincaré. Am cerut să fie mărită frumoasa tablă neagră şi am eliminat câteva mobile ca să obţin spaţiu. M-am gândit mult la felul în care voi reamenaja biroul.

În primul rând, va dispărea instalaţia de aer condiţionat care mă încurcă, vara e normal să-ţi fie cald!

La perete, o vitrină care va adăposti câteva obiecte personale şi câteva dintre piesele rare din colecţia de obiecte geometrice a institutului.

La stânga, instalez bustul un pic auster al lui Henri Poincaré, cel promis de nepotul lui, François Poincaré.

Iar în spatele meu, am păstrat spaţiu generos pentru un portret al lui Catherine Ribeiro! Am şi ales imaginea, găsită pe Internet, Catherine depărtându-şi braţele ridicate în semn de luptă, de pace, de forţă şi de speranţă. Cu braţele depărtate ca răsculatul din *Tres de Mayo* de Goya în faţa soldaţilor lui Napoleon, sau ca Nausicaä* lui Miyazaki în faţa soldaţilor lui Péjité. E o imagine de forţă, dar şi una de abandon şi vulnerabilitate. Şi asta-mi place foarte mult: nu putem progresa dacă nu acceptăm să ne punem în poziţie vulnerabilă. Am nevoie de imaginea aceasta a *passionariei* cântăreţe, reluată de Baudoin în minunata sa *Salată nisoază***, am nevoie să vegheze asupra mea, trebuie s-o negociez direct cu Catherine.

---

* Personajul unui serial japonez de desene animate. (*N. t.*)

** Volum de benzi desenate. (*N. t.*)

Azi, ca întotdeauna, întâlniri, discuții, ședințe. O convorbire telefonică lungă cu președintele consiliului meu de administrație, P-DG-ul unei întreprinderi de actuariat, pasionat de implicarea sectorului privat în cercetarea științifică. Iar după-amiază, o ședință foto pentru ilustrarea unui interviu într-o revistă de popularizare a științei. Nimic din toate acestea nu e obositor, e un univers pasionant pe care-l descopăr deja de șase luni; noi contacte, noi relații, noi discuții.

Telefonul sună în timp ce fotograful își pregătește aparatele la mine în birou, instalând trepiedul și reflectorul; răspund cu gândul aiurea.

— Alo, da.

— Hello, is this Cédric Villani?

— Yes, this is me.

— This is László Lovász from Budapest.

Îmi stă inima-n loc. László e președintele Uniunii Matematice Internaționale și, în această calitate, președintele comitetului pentru Medalia Fields. E, de altfel, unica informație pe care o am despre acest comitet: în afară de el, habar n-am care sunt ceilalți membri.

— Hello Professor Lovász, how are you doing?

— Good, I'm fine, I have news, good news for you.

— Oh, really?

E ca-ntr-un film… știu că e fraza pe care a auzit-o Wendelin Werner acum patru ani. Dar atât de devreme în cursul anului?

— Yes, I'm glad to announce that you have won a Fields Medal.

— Oh, this is unbelievable! this is one of the most beautiful days in my life. What should I say?

— I think you should just be glad and accept it.

De când Grigori Perelman a refuzat Medalia Fields, comitetul își face griji: dacă o s-o refuze și alții? Dar sunt departe de nivelul lui Perelman, și accept fără să fac nazuri.

Lovász continuă să evoce medalia. Comitetul a decis să-i anunțe devreme pe laureați, ca să fie sigur că informația vine de la comitet, şi nu printr-o scurgere de informații.

— It is very important that you keep it perfectly secret, continuă Lovász. You can tell it to your family, but that is all. None of your colleagues should know.

Voi păstra deci secretul timp de… şase luni. Ce mult! Peste exact şase luni şi trei zile televiziunile din lumea întreagă vor anunța vestea. De-acum înainte, trebuie să păstrez acest secret apăsător şi să mă pregătesc lăuntric.

Ce încet vor trece aceste şase luni. În tot acest timp se vor face întruna speculații asupra laureaților medaliilor, dar gura mea va rămâne pecetluită. După cum va reaminti colega mea din Lyon, Michelle Schatzmann, parafrazând un înțelept chinez, „cei care ştiu nu spun, şi cei care spun nu ştiu".

Înainte de telefonul lui Lovász, îmi dădeam 40% şanse să primesc Medalia. Acum trec la 99%! Dar încă nu 100%, rămâne totuşi posibilitatea unei farse. Aşa cum a făcut Landau împreună cu un amic, ca să-i joace un renghi unui coleg pe care nu-l înghițea: nemernicii ăştia i-au trimis o telegramă falsă de felicitare din partea Academiei Regale a Suediei. *Felicitări, ați primit Premiul Nobel etc.*

Aşa că nu te bucura încă, Cédric, cine-ți garantează că la telefon era chiar Lovász? Ai s-aştepți confirmarea prin mail înainte să-ți dai drumul!

Ah, da, secretul… Dar fotograful de la mine din birou?

Se pare că n-a auzit nimic, probabil că nici nu ştie englezeşte. Să sperăm. Reluăm şedința foto. O fotografie în fața institutului, una cu trofeul meu de fizică-matematică…

— Cred că avem destule ca să ilustrăm articolul, totul e-n regulă. Chiar, voiam să vă întreb, în articol se spune că s-ar putea să câştigați un premiu, ceva?

— Poftim? Medalia Fields, asta vreți să spuneți? Jurnaliştii fac speculații, dar asta se decide doar mult mai târziu, congresul e tocmai în august.

— Bun, înțeleg. Credeți că aveți şanse?

— Păi, asta-i chiar dificil de prezis… Nimeni n-are de unde şti!

*

După Primul Război Mondial, într-o Europă în descompunere, asupra căreia Tratatul de la Versailles apăsa cu o greutate strivitoare, era nevoie să se reînnoade legăturile dintre popoare. Ce e valabil pentru societate e valabil şi pentru ştiință: trebuiau reconstruite instituțiile.

În timp ce în Franța, matematicianul şi omul politic Émile Borel demarează proiectul Institutului Poincaré, în Canada, matematicianul John Charles Fields, membru influent al recent înființatei Uniuni Matematice Internaționale, are ideea să instituie o medalie pentru matematicieni: o recompensă prin care să fie salutate mari lucrări, după modelul Premiului Nobel, şi totodată să fie încurajate tinerele talente. Medalia urma să fie completată de o modestă recompensă financiară.

Fields a găsit fondurile necesare proiectului, a comandat unui sculptor canadian imaginile şi a ales inscripțiile în latină, limba universală, pentru a reflecta universalitatea matematicii.

Pe avers, un profil al lui Arhimede, însoțit de inscripția TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI – Înalță-te peste tine însuți şi vei cuprinde lumea.

Pe verso, lauri, ilustrarea unei teoreme a lui Arhimede despre calculul volumelor sferelor şi cilindrilor şi inscripția CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBUERE – Matematicienii adunați din lumea întreagă au răsplătit pentru scrieri excepționale.

Iar pe muchie, numele laureatului şi anul distincției.

Totul în aur masiv.

Nu şi-a dorit să dea un nume acestei recompense, dar, după moartea lui, s-a impus numele de Medalie Fields. A fost

decernată pentru prima dată în 1936, apoi o dată la patru ani, începând cu 1950, cu ocazia Congresului Internațional al Matematicienilor, marea întâlnire a planetei matematice, un eveniment care astăzi adună până la 5 000 de participanți, într-un loc care se schimbă de la o ediție la alta.

Pentru a respecta voința lui Fields de a face din ea un premiu de încurajare, se acordă unor cercetători care au mai puțin de 40 de ani. Regula socotirii vârstei a fost precizată în 2006: maximum 40 de ani la 1 ianuarie al anului în care se ține congresul. Cât despre numărul medaliilor, el variază între 2 şi 4, în funcție de ediție.

Un embargo ferm asupra deciziei juriului, dimpreună cu o pregătire foarte serioasă a presei, asigură decernării Medaliilor Fields un răsunet fără echivalent în lumea matematică. Medalia e adesea decernată de şeful statului în care se ține congresul, iar vestea face imediat înconjurul lumii.

Capitolul 41

RER B, 6 mai 2010

Printre mijloacele de transport în comun pariziene, RER-urile sunt, toate, remarcabile din mai multe pricini. Despre RER B, cel pe care îl iau zilnic, se poate spune că se strică în fiecare zi sau aproape, şi că uneori e ticsit până la miezul nopţii. (Să fim drepţi, are şi calităţi: se îngrijeşte ca utilizatorii lui să aibă o activitate fizică regulată, obligându-i adesea să schimbe pe parcurs trenul; şi e preocupat de agilitatea lor intelectuală, menţinând suspansul în privinţa orarelor de sosire a trenurilor şi a staţiilor în care va opri.)

Dar în dimineaţa asta e foarte, foarte devreme, şi garnitura e aproape pustie. Mă întorc acasă după un colocviu la Cairo.

Călătoria spre Cairo a fost somptuoasă, alături de cea mai frumoasă pasageră pe care-am văzut-o vreodată. Ne-am uitat împreună la un film pe calculatorul meu, împărţindu-ne căştile ca frate şi soră (trebuie zburat întotdeauna la clasa economică, statistic fetele sunt mai frumoase).

Întoarcerea a fost mai puţin glamour, din toate punctele de vedere. Şi, mai ales, am ajuns pe aeroportul Charles-de-Gaulle după ora 22, ceea ce mi-a adus cele mai mari necazuri (nu cumpăraţi niciodată bilet pentru un avion care ajunge la CDG după ora 22). Nu mai puteam lua RER-ul pentru a mă întoarce la Paris, dar asta nu m-a făcut să depun armele şi să iau un taxi, aşa că am aşteptat autobuzul… Primul era plin încă înainte de a sosi în staţia în care eram, al doilea era şi el plin; cât despre al treilea, m-aş fi putut urca numai dacă – precum alţi

pasageri – aş fi ales să urc în forţă şi să nu ţin seamă de indicaţiile şoferului. Pe scurt, am ajuns la Paris la două noaptea. Noroc că vechiul meu apartament parizian era gol şi am putut dormi câteva ore, înainte de a mă porni din nou la drum către suburbiile din sud.

În RER, îmi trec în revistă poşta electronică, fără conexiune, ca de obicei. Atâtea mailuri… Dar, de la telefonul lui Lovász din februarie şi confirmarea survenită câteva zile mai târziu, presiunea de pe umerii mei a început să scadă. Nu s-a întâmplat dintr-odată: e încă nevoie de luni de zile până să mă părăsească sentimentul de *urgenţă*. Şi-apoi, peste trei luni şi jumătate voi avea de făcut faţă unei alte presiuni. Până atunci, trebuie să savurez acest sentiment de eliberare.

Un mesaj mă anunţă că sunt singurul reţinut pe postul 1928 de transfer la Universitatea Lyon-I. Oricum, 1928 nu putea să-mi poarte decât noroc, doar e anul înfiinţării Institutului Poincaré! Transferul la Lyon-I îmi va permite să păstrez o legătură ştiinţifică lyoneză fără să blochez un post la Şcoala Normală Superioară din Lyon, unde profesorii sunt puţini.

O cerşetoare îşi încearcă norocul cu rarii pasageri. Intră în vorbă cu o voce spartă.

— Vii din vacanţă cu rucsacul ăsta mare?

— Vacanţă? Oh, nu! ultima mea vacanţă a fost de Crăciun… iar următoarea nu-i pe-aproape.

— De unde vii?

— Am fost la Cairo, în Egipt, cu treabă.

— E bine. Cu ce te-ocupi?

— Eu? Cu matematica.

— Ah, bine. Hai, pa. Şi baftă în continuare cu studiile!

Zâmbesc, n-are cum să nu-mi facă plăcere să fiu încă luat drept student. Dar, până la urmă, are dreptate, sunt în continuare student… poate pentru toată viaţa.

*

Azi, în timp ce zburam, m-am „amuzat“ să rezerv 5 minute ca să încerc să simt toate fenomenele electrice, electronice, electromagnetice, aerodinamice, mecanice care aveau loc în şi în jurul avionului. Toate aceste mici fenomene disparate care constituie un tot care funcționează! E fascinant să devii conştient de ceea ce ne înconjoară… fascinant!

Din păcate, la comenzile unui avion, rar se întâmplă să ai mai mult de 5' pentru genul acesta de gânduri.

Toate cele bune.

(Extras dintr-un e-mail primit pe 9 septembrie 2010 de la un necunoscut.)

Capitolul 42

Biserica Saint-Louis-en-Île, 8 iunie 2010

Resping puțin prea brusc cădelnița pe care mi-o întinde cineva. În costum negru, cu cravată ascot neagră la gât în semn de doliu, păianjen verde la rever în semn de speranță, înaintez către sicriu, pe sub bolta gigantică, îl ating şi mă înclin respectuos. La câțiva centimetri de mine odihnesc rămăşițele lui Paul Malliavin, figură tutelară a probabilităților din a doua jumătate a secolului XX. Inventator al faimosului „calcul Malliavin", a contribuit mai mult decât oricine la apropierea dintre probabilități, geometrie şi analiză, o apropiere în care mă înscriu prin lucrările mele asupra transportului optimal. După cum îmi place grozav să-mi spun când am ocazia, „în Malliavin se află Villani".

Malliavin era un personaj complex şi fascinant, conservator şi iconoclast deopotrivă, înzestrat cu o minte excepțională. M-a urmărit încă de la începutul carierei, m-a încurajat şi mi-a călăuzit primii paşi. Mi-a încredințat şi responsabilități importante în comitetul editorial al dragului său *Journal of Functional Analysis*, revista pe care a fondat-o în 1966 împreună cu doi cercetători americani.

În ciuda diferenței de 48 de ani dintre noi, deveniserăm prieteni. Gustul său matematic era aproape de al meu şi exista, fără îndoială, admirație reciprocă. N-am trecut niciodată dincolo de formula „Dragă Prietene", dar nu era o exprimare politicoasă, formula era sinceră.

Într-o zi, eram amândoi la un colocviu în Tunisia – Malliavin avea deja 78 de ani, dar era încă atât de activ! La momentul

închiderii, făceam oficiile de prezentator şi am evocat în câteva cuvinte impactul său fenomenal; nu mai ştiu dacă l-am numit legendă vie, dar asta era ideea. Malliavin a părut un pic descumpănit în faţa acestei expuneri publice şi, pe urmă, a venit şi mi-a spus cu blândeţe, afectând mina cea mai serioasă din lume: „Ştiţi, Legenda e cam obosită.“

Dar orice-ar fi spus el, Paul Malliavin a murit fără să coboare garda, „făcând matematică până-n ultimul minut“, aşa cum a anunţat ginerele lui. A murit în aceeaşi zi cu Vladimir Arnold, alt gigant matematic al secolului XX, cu un stil complet diferit.



Va trebui să mergem mai departe fără el. Puteţi conta pe mine, dragă prietene, *Journal of Functional Analysis* e pe mâini bune.

Şi… aş fi fost atât de mândru să vă vorbesc despre acel telefon pe care l-am primit în februarie, ştiu că aţi fi fost încântat.

Imediat ce se termină ceremonia, trebuie să mă întorc în goană la Institutul Poincaré, unde azi se închide marele colocviu pe care îl organizăm împreună cu Institutul Clay pentu a celebra rezolvarea Conjecturii Poincaré de către Grigori

Perelman. Trebuie să fiu prezent la ultima expunere ca să rostesc câteva cuvinte drept încheiere; ca să elimin orice risc de întârziere, alerg de mama focului pe străzile din Paris, din insula Saint-Louis până în centrul arondismentului V. Dacă m-ar vedea „Domnul Paul", cu fața roșie, șuierând ca o locomotivă și leoarcă de transpirație în costumul meu – sigur i-aș smulge un zâmbet. Ce prostie, oare m-am înclinat cum se cuvine în fața sicriului? Oricum, era sincer, asta contează.



Grigori Perelman

Pe la începutul secolului XX, Henri Poincaré dezvolta un domeniu matematic complet nou, topologia diferențială, al cărei scop era de a clasifica, până la o deformare, formele care ne înconjoară.

Deformând un covrig, obținem o ceașcă, dar niciodată o sferă: ceașca are o gaură (o toartă, un mâner), sfera nu are așa ceva. La modul general, pentru a înțelege suprafețele (formele pe care un punct poate fi reperat într-o regiune mică prin două coordonate, cum ar fi longitudinea și latitudinea), e de ajuns să socotim numărul de mânere.

Dar noi trăim într-un univers cu trei dimensiuni spațiale. Oare pentru a clasifica asemenea obiecte, e de ajuns să cunoaștem

numărul de găuri?E întrebarea pe care a pus-o Poincaré în 1904, la capătul unei impunătoare serii de şase articole în care a pus, oarecum dezordonat şi cu incontestabil geniu, bazele topologiei născânde. Astfel, Poincaré s-a întrebat dacă toate formele de dimensiune 3, mărginite (universuri finite, să spunem), fără găuri, sunt echivalente. Una dintre aceste forme era cunoscută, era 3-sfera, sfera cu trei coordonate din spaţiul de dimensiune 4. În termeni tehnici, Conjectura lui Poincaré se enunţă aşa: O varietate netedă de dimensiune 3, compactă şi fără bord, simplu conexă, e difeomorfă cu 3-sfera.

E adevărat enunţul acesta plauzibil? Poincaré a pus întrebarea şi a încheiat cu aceste admirabile cuvinte, care aproape se ridică la nivelul faimoasei „margini înguste" a lui Fermat: „Dar întrebarea aceasta ne-ar duce prea departe."*

A trecut vremea...

Conjectura lui Poincaré a devenit enigma cea mai celebră din toată geometria, irigând întreg secolul XX, sursă a nu mai puţin de trei Medalii Fields pentru progrese parţiale în această problemă.

O etapă decisivă s-a înregistrat atunci când a intrat în joc William Thurston. Geometru vizionar, Thurston avea o intuiţie extraordinară a ansamblului formelor de dimensiune 3 – toate universurile posibile. El a propus un fel de clasificare zoologică, taxonomică, a acestor forme de dimensiune 3; iar clasificarea asta era atât de minunată, încât s-au raliat şi scepticii, cei care se mai îndoiau de Poincaré s-au înclinat în faţa unei viziuni atât de frumoase, încât trebuia să fie şi adevărată. E vorba despre Programul lui Thurston, care îngloba

---

* E vorba despre notaţia lui Fermat de pe marginea unei pagini din *Aritmetica* lui Diofant, în care enunţa celebra lui teoremă, adăugând că n-are loc să dea şi demonstraţia. E foarte puţin probabil ca Fermat să fi avut într-adevăr o demonstraţie corectă – ea avea să fie dată trei secole şi jumătate mai târziu de Andrew Wiles, prin apelul la un uriaş aparat matematic. (*N. t.*)

Conjectura lui Poincaré, şi din care Thurston însuşi n-a reuşit să exploreze decât o parte.

În 2000, Clay Mathematical Institute a ales, absolut firesc, Conjectura lui Poincaré drept una dintre cele şapte probleme pentru rezolvarea cărora acorda câte un milion de dolari. Se credea atunci că faimoasa problemă risca să reziste încă un secol!

Dar, începând din 2002, matematicianul rus Grigori Perelman uimea comunitatea anunțând o soluție a acestei probleme la care lucrase în secret timp de şapte ani!!

Născut în 1966 la Leningrad – alias Sankt-Petersburg –, Perelman contractase virusul matematic de la mama sa, om de ştiință de talent, din excepționala şcoală matematică rusă condusă de Andrei Kolmogorov, şi de la clubul de matematică, unde profesori pasionați îl pregătiseră pentru olimpiadele internaționale. Studiase apoi sub îndrumarea unora dintre cei mai buni geometri ai secolului: Alexandrov, Burago, Gromov; în câțiva ani, devenise liderul cercetării în teoria spațiilor singulare cu curbură pozitivă. Demonstrația sa pentru „conjectura sufletului" i-a adus recunoaşterea, părea sortit unei cariere fulminante… şi-apoi a dispărut.

Din 1995, Perelman n-a mai dat semne de viață. Dar, departe de a se fi oprit, el preluase de la Richard Hamilton teoria fluxului Ricci, o rețetă care permite să deformezi continuu obiecte geometrice etalându-le curbura, la fel cum ecuația căldurii etalează temperatura. Hamilton avea ambiția de a-şi utiliza ecuația pentru a demonstra Conjectura lui Poincaré, dar, de mai mulți ani, se poticnise în probleme tehnice foarte mari.

Până la acel celebru mesaj electronic din 2002 pe care Perelman l-a trimis câtorva colegi americani. Un mesaj de câteva rânduri, semnalând un manuscris pe care-l făcuse public pe Internet şi în care schița, după propria sa formulă, o „eboşă eclectică de demonstrație" a Conjecturii lui Poincaré şi, de fapt, a unei mari părți a Programului lui Thurston.

Inspirat de fizica teoretică, Perelman a arătat că o anumită cantitate, pe care a numit-o entropie, pentru că semăna cu entropia lui Boltzmann, descreşte atunci când geometria e deformată de fluxul Ricci. Mulțumită acestei descoperiri originale, de o profunzime pe care cu siguranță încă nu am înțeles-o pe deplin, Perelman reuşea să demonstreze că fluxul Ricci poate fi lăsat să acționeze fără să ajungă vreodată la o explozie, adică la o singularitate prea violentă. Sau, mai degrabă: dacă se produce o singularitate, aceasta poate fi descrisă şi controlată.

Perelman a revenit atunci în Statele Unite pentru a face câteva expuneri asupra lucrărilor lui şi a impresionat prin felul cum stăpânea problema. Agasat de presiunea mediatică pusă asupra lui, era iritat şi de lentoarea cu care comunitatea matematică îi digera demonstrația. S-a întors la Sankt-Petersburg şi i-a lăsat pe alții să-i verifice singuri argumentele. Au fost necesari nu mai puțin de patru ani pentru ca mai multe echipe să reproducă demonstrația lui Perelman şi să completeze toate detaliile!

Miza considerabilă a acestei demonstrații şi retragerea lui Perelman au pus comunitatea matematică într-o situație inedită, care a generat tensiuni şi controverse în legătură cu paternitatea demonstrației. În orice caz, matematicienii au sfârşit prin a se convinge că Perelman demonstrase într-adevăr marea Conjectură a Geometrizării a lui Thurston şi, odată cu ea, Conjectura lui Poincaré. Realizarea asta n-are echivalent în ultimele decenii, poate cu excepția demonstrației lui Andrew Wiles a Marii Teoreme a lui Fermat, în anii '90.

Asupra lui Perelman a plouat cu recompense: în 2006, Medalia Fields, apoi titlul de cel mai important progres ştiințific al anului, un titlu care nu revine aproape niciodată matematicienilor. În 2010 a urmat Premiul Clay, prima oară când acest premiu substanțial era atribuit! Perelman n-avea ce face cu aceste recompense, pe care le-a refuzat pe rând.

O mulțime de jurnaliști din lumea întreagă s-au repezit să comenteze faptul că a refuzat milionul de dolari al lui Landon Clay, dezvoltând până la saturație tema matematicianului nebun. Se înșelau, nu încape îndoială: extraordinar în cazul lui Perelman nu era nici refuzul banilor și al onorurilor, nici caracterul excentric – sunt cunoscute exemple și mai și, pentru ambele –, ci tăria de caracter și extraordinara putere de pătrundere care i-au trebuit pentru a învinge, în șapte ani de muncă solitară și curajoasă, enigma matematică emblematică a secolului XX.

În iunie 2010, Institutul Matematic Clay și Institutul Henri Poincaré au organizat împreună, la Paris, un colocviu în onoarea acestei realizări. Cincisprezece luni mai târziu, au anunțat că banii refuzați de Perelman vor servi pentru înființarea unei catedre foarte speciale la Institutul Henri Poincaré. Această „catedră Poincaré“ va găzdui tineri matematicieni extrem de promițători, în condiții ideale, fără obligații de curs sau de rezidență, pentru a le permite să se dezvolte, la fel cum Perelman a putut s-o facă atunci când a beneficiat de ospitalitatea Institutului Miller de la Berkeley.

Capitolul 43

Hyderabad, 19 august 2010

Numele meu răsună în sala imensă, iar pe ecranul gigantic mi se afişează portretul realizat de fotograful Pierre Maraval – cu lavalieră roşu-carmin şi păianjen alb smălţat cu mov. N-am dormit toată noaptea, dar am impresia că n-am fost niciodată atât de treaz. E momentul cel mai important din întreaga mea viaţă profesională, cel la care matematicienii visează fără să îndrăznească să şi-o mărturisească. Omul de ştiinţă mai mult sau mai puţin anonim, numărul 333 în lista celor „O mie de cercetători" fotografiaţi de Maraval, tocmai iese la lumină.

Mă ridic şi înaintez spre estradă în timp ce răsună anunţul: *O Medalie Fields e atribuită lui Cédric Villani pentru demonstraţiile date amortizării Landau neliniare şi convergenţei la echilibru pentru ecuaţia lui Boltzmann.*

Urc treptele, străduindu-mă să nu fiu nici prea încet, nici prea rapid, şi mă apropii de preşedinta Indiei, în centrul estradei. Preşedinta e scundă, dar emană o forţă care e palpabilă în atitudinea anturajului său. Mă opresc în faţa ei; se înclină uşor, mă înclin şi eu, ca răspuns, mult prea mult. *Namaste.*

Îmi întinde medalia şi eu o prezint mulţimii, cu bustul aplecat într-un mod ciudat, pentru a nu fi în profil nici faţă de lume, dar nici faţă de şefa statului indian; cam la 45 de grade faţă de fiecare.

Vreo trei mii de persoane mă aclamă în sala de conferinţe uriaşă a hotelului de lux care găzduieşte Colocviul Internaţional al Matematicienilor, recolta 2010. Câţi erau, acum optsprezece

ani, cei care mă aplaudau după discursul de deschidere al balului bicentenarului Şcolii Normale Superioare? Să fi fost o mie? *Those were the days…* Tata fusese atât de trist că nu reuşise să facă nici o fotografie la ceremonia aceea, din pricina unei erori de organizare. Fusese o întreagă poveste, dar cât de derizorie pare acum, faţă de armata de fotografi şi cineaşti care mitraliază scena! E ca la festivalul de la Cannes…

Iau din nou medalia, mă înclin din nou în faţa preşedintei, fac trei paşi în spate, mă întorc şi mă îndrept spre perete, aproape exact aşa cum am repetat îndelung aseară, împreună cu organizatorii colocviului.

Deloc rău. M-am descurcat mai bine decât Elon Lindenstrauss, care a fost decorat primul şi care, cu capul în nori, a masacrat toate indicaţiile protocolare. După ce-a trecut, Stas Smirnov, un alt laureat, mi-a şoptit: „Imposibil să ne iasă mai prost."

După momentul imortalizat de camere, nu mai ştiu ce s-a mai întâmplat. A venit apoi momentul prezentării recompensei în faţa mulţimii digitale – aparate de fotografiat, aparate video, maşini de captat şi înregistrat –, apoi a fost o conferinţă de presă…

În sala de ceremonii fuseseră interzise laptopurile şi celularele. Imediat voi avea 300 de mesaje de felicitare în Inbox, multe altele vor urma. Mailuri de la colegi, de la prieteni, de la cunoştinţe îndepărtate, de la fantome pe care nu le-am văzut de zece, douăzeci sau treizeci de ani, de la complet necunoscuţi, de la foşti colegi de şcoală primară… Unele sunt foarte emoţionante. Dintr-unul din mesajele astea de felicitare aflu despre moartea cu mai mulţi ani în urmă a unui prieten din tinereţe. Cum bine se ştie, viaţa e plină de bucurii şi dureri întreţesute inextricabil.

Iar, prin intermediul presei, un mesaj de felicitare oficial din partea preşedintelui Republicii. După cum era de aşteptat, şi Ngô a primit o medalie; îmi va lua ceva vreme până să

înțeleg cu adevărat ce izvor de mândrie națională e această dublă victorie. Fără să mai punem la socoteală că Yves Meyer a obținut prestigiosul Premiu Gauss pentru întreaga carieră! Francezii vor redescoperi acum că Franța este, de patru secole deja, la vârful cercetării matematice internaționale. În acest 19 august 2010, țara lor totalizează de-acum nu mai puțin de 11 medalii Fields din cele 53 atribuite până azi.

Clément e acolo, bineînțeles, radiază. Când te gândeşti că sunt mai puțin de zece ani de când intra prima dată în biroul meu, în căutarea unui subiect de teză… O şansă pentru el, o şansă pentru mine.

Părăsesc mulțimea şi mă întorc în camera de hotel. O cameră insipidă, care nu aminteşte în nici un fel de India; aş putea fi la fel de bine în Țara de Foc! Dar sunt aici ca să-mi fac datoria.

Patru ore la rând, fără încetare, răspund apelurilor ziariştilor, jonglând între telefonul fix şi cel mobil. Cum se termină o convorbire, îmi verific înregistrările şi găsesc mesaje noi, nu se mai termină. Întrebări personale, întrebări ştiințifice, întrebări instituționale. Şi întrebări care se repetă adesea, aproape identic. *Ce simțiți după ce ați primit această recompensă?*

În fine, cobor din nou, un pic palid şi înfometat – dar am trecut şi prin momente mai grele. Comand un ceai masala, cu mirodenii multe, şi mă duc să înfrunt din nou mulțimea. Un val de tineri se năpusteşte asupra mea, mulți indieni, desigur. Semnez sute de autografe şi pozez, cam năuc, pentru nenumărate fotografii.

Spre deosebire de ceilalți laureați, eu am venit singur: soția şi copiii au rămas în Franța, feriți de înghesuială. Prefer aşa! Şi am respectat consemnul, doar soției i-am spus despre medalie, nimănui altcuiva – nici măcar părinților, care aveau să afle din presă.

Iar… Catherine Ribeiro mi-a trimis acasă un superb buchet de trandafiri!

Nici nu-mi trece prin minte că, în timp ce la Hyderabad pozez pentru o mulțime de fotografi improvizați, la Lyon, colega mea Michelle Schatzman trage să moară. Fiica marelui astrofizician francez Évry Schatzman, Michelle era una dintre matematicienele cele mai originale pe care mi-a fost dat să le întâlnesc, întotdeauna gata să se lanseze în provocări pedagogice de netrecut sau să exploreze legături despre care nimeni altcineva nu îndrăznea să se ocupe, ca frontiera dintre algebră şi analiză numerică. *Frontiere*, aşa se numea un program de cercetare conceput cât ai bate din palme de Michelle, cu înfățişare de manifest. Cu Michelle eram prieten încă de la sosirea mea la Lyon, în 2000; am mers la seminarii comune şi am complotat, nu doar o dată, pentru a atrage cutare sau cutare matematician excelent la Universitatea din Lyon.



Michelle Schatzman

Michelle nu-şi înghițea niciodată vorbele şi excela la călcatul în străchini, folosind uneori un umor negru distrugător. Atinsă de un cancer incurabil de mai bine de cinci ani, alterna chimioterapia cu operațiile şi ne spunea, cu ochi strălucitori, cât de frumoasă e viața de când făcea economie la şampon. Acum câteva luni, când împlinise şaizeci de ani, o sărbătorisem, la Lyon, ca matematiciană. Printre vorbitorii veniți cam de peste tot, era şi polimorful Uriel Frisch, fizician de renume

mondial care, pe vremuri, fusese elevul tatălui lui Michelle; şi eram eu, fiu spiritual al unuia dintre fiii săi spirituali. Michelle făcuse o analogie strălucită între expunerea mea despre amortizarea Landau şi „tigrii“ evocaţi de Uriel. Ce clasă!

Dar, în ultimele săptămâni, starea i s-a agravat brusc. Mândră şi inflexibilă, în boală ca şi în timpul întregii vieţi, Michelle a refuzat morfina, pentru a-şi păstra luciditatea. Pe patul de moarte a aflat rezultatele Medaliilor Fields pe care le aştepta nerăbdătoare; şi, după câteva ore, s-a stins. Cum ştim: viaţa e plină de bucurii şi dureri întreţesute inextricabil.

*

19 august 2010, în India

Începând de azi-dimineaţă, marele hotel din Hyderabad conţine cea mai mare concentrare de matematicieni din lume. Veniţi de pe toate continentele, fiecare a adus cu sine domenii matematice specifice: analiză, algebră, geometrie, probabilităţi, statistică, ecuaţii cu derivate parţiale, geometrie algebrică şi algebră geometrică, logică dură şi moale, geometrie metrică şi ultrametrică, analiză armonică şi armonioasă, teoria probabilistă a numerelor şi a numelor, descoperitori de modele şi de supermodele, creatori de teorii economice şi microeconomice, oameni care concep supercalculatoare şi algoritmi genetici, specialişti în tratarea imaginilor şi în geometrie banachică, matematică de vară, de toamnă, de iarnă şi de primăvară şi o mie de alte specialităţi care preschimbă mulţimea într-un mare zeu Shiva cu o mie de braţe matematice.

Unul după altul, cei patru laureaţi ai Medaliei Fields, laureaţii premiilor Gauss, Nevanlina şi Chern sunt oferiţi ca sacrificiu zeului Shiva. Preşedinta Indiei, mare preoteasă, îi prezintă pe cei şapte matematicieni terorizaţi aclamaţiilor mulţimii.

E începutul marii sărbători a Congresului Internațional al Matematicienilor care, timp de două săptămâni, va vedea cum se succedă expuneri, discuții, recepții, cocktailuri, interviuri, fotografii, delegații, serate dansante şi vesele, plimbări cu taxiuri de lux sau cu romantice ricşe. Sunt celebrate unitatea şi diversitatea matematicii, geometria sa mereu în mişcare, bucuria muncii împlinite, felul cum ne minunăm de o descoperire, cum visăm în fața necunoscutului.

Odată sfârşită sărbătoarea, toți matematicienii se vor întoarce în universitățile şi în centrele lor de cercetare, într-o întreprindere sau acasă şi vor relua, fiecare în felul lui, marea aventură a explorării matematice, împingând împreună mai departe frontierele cunoaşterii umane, înarmați cu logica şi cu truda lor dură, dar şi cu imaginație şi pasiune.

Şi deja sunt cu gândul la următorul Congres Internațional al Matematicienilor, peste patru ani, în sălaşul venerabilului tigru coreean. Care vor fi temele principale? Care vor fi viitoarele victime?

Când va veni momentul, mii de matematicieni vor veni să se încline în fața bătrânului tigru. Vor explora geometria formelor lui sinuoase, îi vor testa vioiciunea stocastică, vor analiza partea de reacție-difuzie din dungile sale, vor efectua chirurgie diferențială pe firele din mustața lui, vor evalua curbura ghearelor sale tăioase, îl vor elibera din gropile cuantice de potențial şi vor fuma împreună cu el teoriile eterate ale corzilor şi mustăților vibrante. Pentru câteva zile, puternicul tigru va fi matematician din capătul cozii până-n vârful botului.

Contribuția mea la ediția coreeană a cărții *Cei care descifrează* (Belin), editată de Institutul de Înalte Studii Ştiințifice.

*

Tyger phenomenon for the Galerkin-truncated Burgers and Euler equations (1h00') by Uriel Frisch

It is shown that the solutions of the inviscid hydrodinamical equations with suppresion of all spatial Fourier modes having wavenumbers in excess of a threshold k_g exhibit unexpected features. The study is carried out for both the one-dimensional Burgers equation and the two-dimensional incompressible Euler equation. At large k_g for smooth initial conditions, the first symptom of truncation, a localized short-wavelength oscillation which we call a "tyger", is caused by a resonant interaction between fluid particle motion and truncation waves generated by small-scale features (shocks, layers with strong vorticity gradients, etc.) These tygers appear when complex – space singularities come within one Galerkin wavelength $\lambda_g = 2\pi / k_g$ from the real domain and typically arise far away from preexisting small-scale structures at locations whose velocities match that of such structures. Tygers are weak and strongly localized at first – in the Burgers case at the time of appearance at the first shock their amplitudes and widths are proportional to $k_g^{-2/3}$ and $k_g^{-1/3}$ respectively – but grow and eventually invade the whole flow. They are thus the first manifestations of the thermalization predicted by T.D. Lee in 1952. The sudden dissipative anomaly – the presence of a finite dissipation in the limit of vanishing viscosity after a finite time –, which is well known for the Burgers equation and sometimes conjectured for the 3D Euler equation, has a counterpart in the truncated case: the ability of tygers to store a finite amount of energy in the limit $k_g \to \infty$. This leads to Reynolds stresses acting on scales larger than the Galerkin wavelength and thus prevents the flow from converging to the inviscid-limit solution. There are indications that it may be possible to purge the tygers and thereby to recover the correct inviscid-limit behaviour.

(Rezumatul unui articol de Samriddhi Sankar Ray, Uriel Frisch, Sergei Nazarenko şi Takeshi Matsumoto, prezentat de Frisch la un colocviu internaţional).

*

THE TYGER (William Blake, 1794)

Tyger Tyger burning bright
In the forest of the night
What immortal hand or eye
Could frame the fearful symmetry

In what distant deeps or skies
Burnt the fire of thine eyes
On what wings dare he aspire
What the hand dare sieze the fire

And what shoulder & what art
Could twist the sinews of thy heart
And when thy heart began to beat
What dread hand & what dread feet

What the hammer what the chain
In what furnace was thy brain
What the anvil what dread grasp
Dare its deadly terrors clasp

When the stars threw down their spears
And water'd heaven with their tears
Did he smile his work to see
Did he who made the Lamb make thee

Tyger Tyger burning bright
In the forest of the night
What immortal hand or eye
Dare frame the fearful symmetry

Capitolul 44

Saint-Rémy-lès-Chevreuses, 17 noiembrie 2010

Toamna, numai auriu, roşu şi negru: frunze aurii, frunze roşii, corbi negri strălucind ca în cântecul de noiembrie al lui Tom Waits.

Ies din staţia dragului meu bătrân RER B şi mă afund în noapte.

Ultimele trei luni au fost atât de intense!

Autografele.

Ziarele.

Radiourile.

Emisiunile TV.

Filmările.

Duetul meu cu Franck Dubosc, pe care l-am descoperit în direct pe un platou al Canal+… unii mi-au reproşat că m-am pretat la „farsa" asta, dar ce contează! A doua zi, pe stradă, mă oprea toată lumea, toţi mă „văzuseră la televizor".

Şi întâlnirile cu politicieni, cu artişti, cu studenţi, cu industriaşi, cu patroni, cu revoluţionari, cu parlamentari, cu enarci[1], cu preşedintele Republicii…

Întrebări care ciclează. *Cum aţi ajuns să vă placă matematica de ce sunt francezii atât de buni la matematică v-a schimbat Medalia Fields viaţa ce motivaţie mai aveţi acum că aţi primit distincţia supremă sunteţi cumva un geniu care e semnificaţia păianjenului dumneavoastră…*

1. Fost elev al Şcolii Naţionale de Administraţie (ENA) (*N. t.*)

Bao Châo a plecat înapoi în Statele Unite, lăsându-mă să înfrunt de unul singur valul. Ceea ce nu-mi displace, e pasionant să descoperi universul ăsta. Partea din spatele decorului de televiziune, din spatele ziarelor. Constat pe propria mea piele că un interviu se depărtează adesea de ceea ce spune persoana intervievată, că stă să se nască o persoană mediatică abstractă, pe nume Cédricvillani, una care nu e cu adevărat eu şi pe care nu pot s-o controlez cu adevărat.

Toate astea în timp ce sunt, în continuare, director… în ziua în care i-am dat replica lui Dubosc, am dat şi un interviu la RTL, am participat la o şedinţă la Primărie pe tema locuinţelor universitare, am discutat mult cu preşedintele consiliului de administraţie de la institutul meu şi am înregistrat pentru emisiunea literară nocturnă *Cuvinte la miezul nopţii*.

Şi-apoi, am coordonat un proiect pentru recuperarea unei subvenţii naţionale, via „Investiţii pentru viitor“ (Marele Împrumut, cum se spune). Un proiect delicat care grupează cele patru institute naţionale şi internaţionale din Franţa: Institutul Henri Poincaré, la Paris (IHP), Institutul de Înalte Studii Ştiinţifice, la Bures-sur-Yvette (IHÉS), Centrul Naţional de Reuniuni Matematice, la Luminy (CIRM), Centrul Internaţional de Matematică Pură şi Aplicată, la Nisa (CIMPA). IHÉS e versiunea franceză a IAS de la Princeton, unde am petrecut şase luni: un refugiu minunat unde toamna răsună trosnetul cojilor de castane care se sparg pe jos, unde genialul Grothendieck a produs partea cea mai bună din incomparabila sa operă şi unde tinerii cercetători îşi pot duce mai departe proiectele, în contact cu unii dintre cei mai buni matematicieni din lume. CIRM, cu conferinţele lui săptămânale, ar fi, mai degrabă, declinarea franceză a institutului Oberwolfach, doar că austera Pădure Neagră a fost înlocuită cu somptuoasele calancuri marseieze. Cât despre CIMPA, organism internaţional dincolo de orice dubiu, se ocupă cu susţinerea matematicii în ţările în curs de dezvoltare, oriunde e necesar şi bine-venit.

Pentru a grupa aceste patru institute şi organismele de care țin, atât de diverse, în jurul unui aceluiaşi contract, am cheltuit comori de negociere. După un an întreg la cârma IHP şi după câteva furtuni diplomatice, eram pregătit pentru această muncă delicată de coordonare. Gruparea se va numi CARMIN: Centrul de Sprijin şi de Reuniuni Matematice INternaționale[1].

Pe lângă activitățile acestea, am conceput două noi expuneri pentru marele public, am scris un text lung cu tema „Timpul", pentru un seminar de fizică teoretică… şi am fost nevoit să iau pe seama mea câteva activități administrative suplimentare, ca să atenuez efectul absenței mai multor persoane din IHP lovite de o adevărată serie neagră de diverse boli. Noroc că personalul rămas sănătos e atât de devotat!

În aceste trei luni, mi-am cheltuit toate rezervele, am ajuns chiar să-mi planific orele de somn cu câteva zile înainte! *Hasta que el cuerpo aguante!* Şi-n timp ce mă gândesc la toamna asta epuizantă, continui să merg şi ajung acum în partea **neagră** a parcursului meu.

În stânga mea, pădurea, doldora de vulpi şi de căprioare; în dreapta, o pajişte pe care dorm cuminți vacile. Dar mai ales, următorii trei sute de metri, o cărare complet în beznă, fără urmă de iluminat public, fără urmă de poluare luminoasă.

E nepreţuit un drum fără lumină! Când luna se ascunde, nu vezi nici la trei metri. Pasul se iuțeşte, inima bate un pic mai repede, simțurile sunt în alertă. Un trosnet în pădure te face să ciuleşti urechile, drumul ți se pare mai lung decât de obicei, îți închipui un vagabond la pândă, abia te abții să n-o iei la sănătoasa.

Tunelul ăsta negru seamănă puțin cu faza de întuneric complet de la începutul unui proiect de cercetare în matematică. *Un matematician e ca un orb într-o cameră în beznă, încercând*

1. Centre d*'Accueil et de Rencontre Mathématiques INternationales. (N. t.*)

să vadă o pisică neagră care, poate, nici nu se află acolo… Se pare că a spus-o Darwin, şi avea dreptate! Beznă s-o tai cu cuțitul, Bilbo în tunelul lui Gollum.

Perioada aceasta în beznă, care marchează primii paşi ai unui matematician într-un teritoriu necunoscut, e prima fază a unui ciclu obişnuit.

După întuneric urmează o mică, foarte mică licărire plăpândă, care ne dă de înțeles că se pregăteşte ceva… Apoi, după licărirea aceea plăpândă, dacă totul merge bine, firul se descâlceşte şi ieşim la lumină, în plină zi! Eşti mândru şi sigur de tine, faci peste tot expuneri. Adesea, faza asta vine dintr-odată, dar uneori e cu totul altfel, am oarecare experiență.

Şi-apoi, după lumină, vine întotdeauna o fază de depresie care urmează marilor împliniri, fază în care-ți minimalizezi contribuția. *La urma urmei, ce-ai făcut tu ar fi putut face orice cretin, ai putea să-ți găseşti deja o problemă mai serioasă şi să faci ceva cu viața ta.* Ciclul cercetării matematice…

Dar, deocamdată, e bine în bezna, la modul propriu, prin care înaintez. Mergând, trag cortina peste o zi bogată în emoții. Ngô, Meyer şi cu mine ne-am întâlnit cu preşedintele Adunării Naționale, în care am recunoscut un frate de arme de îndată ce i-am aflat trecutul de cercetător; apoi am fost aclamați de întreaga Adunare, înainte de pitoreasca sesiune de întrebări la guvern. Iar în biblioteca Adunării Naționale am admirat o comoară inestimabilă, o mobilă construită la comandă pentru a adăposti scrierile oamenilor de ştiință participanți la expediția în Egipt. Monge, Fourier şi atâția alții au consemnat în aceste volume rezultate care au revoluționat biologia, istoria, arhitectura, totul. Frumusețea imaginilor, trasate de mână, cu materiale realizate la fața locului ca să înlocuiască ce se pierduse într-un naufragiu, măreția cărților vechi pe care doar experții sunt autorizați să le mânuiască, toate astea m-au bulversat şi m-a copleşit un sentiment luminos.

Şi totuşi, într-un ungher al minţii mele, stăruie o nelinişte discretă, dar tenace, care a tot crescut, puţin câte puţin în cursul ultimelor luni… Încă n-avem veşti de la *Acta*, încă n-avem veşti de la referenţi! Doar această expertiză independentă, realizată de specialişti al căror anonimat va fi păstrat cu grijă, va putea să ne confirme rezultatele.

După atâtea onoruri, ce-am să spun dacă articolul e greşit? Îmi imaginez că totuşi comitetul Fields a cerut să ne fie verificată amortizarea Landau, dată fiind miza, dar, ca de obicei, nu sunt la curent cu nimic. Şi dacă vreun referent dă peste o greşeală în timpul lentului proces de recitire şi verificare de către terţi? Cédric, eşti tată de familie, sinuciderea rituală nu-i o opţiune.

Gata cu glumele, lucrurile se vor rezolva până la urmă. De altfel, ajung la capătul tunelului întunecat. Acolo, chiar la capăt, o mică, mică licărire plăpândă, e lumina digicodului. Salvat!

E nepreţuită emoţia asta cotidiană, întunericul acesta încărcat de sentimente intense, dar ce bine te simţi când l-ai depăşit! Deschid poarta grea, traversez curtea, intru la mine, aprind lumina, urc la etaj şi mă instalez la birou, pornesc laptopul şi descarc mesajele electronice. Cum, doar 88 de mesaje noi în ultimele 12 ore? Săracă zi…

Dar, în mijlocul şuvoiului, unul care-mi atrage imediat atenţia: *Acta Mathematica*! Deschid febril mesajul de la Johannes Sjöstrand, editorul care se ocupă de articolul nostru.

The news about your paper are good.

Ar fi trebuit să scrie *is good*: „news“, ca şi „mathematics“, e singular, în pofida *s*-ului final. Dar ce contează. N-am nevoie de mai mult, forwardez imediat lui Clément, adăugând două cuvinte: *Gooood news*.

De data asta, teorema noastră chiar s-a născut.

*

Teoremă (Mouhot, Villani, 2009):

Fie $d \geq 1$ *un număr întreg şi fie* $W : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ *o funcţie periodică, pară, local integrabilă, a cărei transformată Fourier satisface condiţia* $|\widehat{W}(k)| = O(1/|k|^2)$.

Fie $f^0 = f^0(v)$ *o distribuţie analitică* $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, *cu proprietatea că*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_0^n}{n!} \|\nabla_v^n f^0\|_{L^1(dv)} < +\infty,$$

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} \left(|\widetilde{f}^0(\eta)| \, e^{2\pi\lambda_0|\eta|} \right) < +\infty$$

pentru un anume $\lambda_0 > 0$, *unde* $\widetilde{f}$ *desemnează transformata Fourier a lui f.*

Presupunem că W şi f^0 *satisfac condiţia de stabilitate liniară generalizată a lui Penrose: pentru orice* $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, *dacă punem* $\sigma = k/|k|$ *şi, pentru orice* $u \in \mathbb{R}$, $f_\sigma(u) = \int_{u\sigma+\sigma^\perp} f^0(z)\,dz$, *atunci, pentru orice* $w \in \mathbb{R}$ *cu* $f'_\sigma(w) = 0$, *avem*

$$\widehat{W}(k) \int_{\mathbb{R}} \frac{f'_\sigma(u)}{u-w}\,du < 1.$$

Fie dat un profil iniţial al poziţiilor şi al vitezelor, $f_i(x,v) \geq 0$, *foarte aproape de starea analitică* f^0, *în sensul că transformata sa Fourier* $\widetilde{f}$ *în poziţie şi viteză satisface condiţia*

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^d,\, \eta \in \mathbb{R}^d} \left| \widetilde{f}(k,\eta) - \widetilde{f}^0(\eta) \right| e^{2\pi\mu|k|} \, e^{2\pi\lambda|\eta|} + \iint \left| f_i(x,v) - f^0(v) \right| e^{2\pi\lambda|v|}\,dx\,dv \leq \varepsilon,$$

cu $\lambda, \mu > 0$ *şi* $\varepsilon > 0$ *suficient de mic.*

Atunci există profiluri analitice $f_{+\infty}(v)$, $f_{-\infty}(v)$ *astfel încât soluţia ecuaţiei lui Vlasov neliniară, cu potenţial de interacţie W şi date iniţiale* f_i *la timpul* $t = 0$, *verifică*

$$f(t,\,\cdot\,) \xrightarrow{t\to\pm\infty} f_{\pm\infty} \text{ \textit{slab;}}$$

mai precis în sensul convergenței simple, exponențial rapide, a modurilor Fourier.

Viteza de convergență a ecuației neliniare este arbitrar apropiată de viteza de convergență a ecuației liniarizate, cu condiția ca $\varepsilon > 0$ *să fie suficient de mic. În plus, marginalele* $\int f\,dv$ *şi* $\int f\,dx$ *converg exponențial repede către valoarea lor de echilibru, în toate spațiile* C^r.

Toate estimările care apar în enunțul neliniar sunt constructive.



Clément Mouhot & Cédric Villani

Epilog

Budapesta, 24 februarie 2011

Cele patru sticle sunt aliniate una lângă alta pe măsuța care se clatină. Cu mintea aburită de vinul select, podgoria Villányi, încerc să-l urmăresc pe Gábor în descrierea, cu multe detalii, a meritelor comparate ale acestor patru sortimente de tokay. Tânăr, sec, dulce… nu-s în stare să aleg.

După ce-au mai luat de două ori din gulaş şi din tarta de mere, copiii s-au dus să fotografieze totul în micul apartament în care tronează un ecran gigant. Claire mă ajută să aleg un tokay bio şi licoros, stăpâna casei aduce un cappuccino superb cu lapte delicios de cremos…

Gábor vorbeşte despre Ungaria, despre tinerețea lui, despre cele douăsprezece ore de matematică săptămânale ale micuților maghiari pasionați, despre enunțurile problemelor de olimpiadă retransmise la televizor – şi le aminteşte şi soția lui.

Vorbeşte despre limba sa extraordinară, verişoară îndepărtată a finlandezei de care s-a despărțit acum o mie de ani. O limbă care obligă ascultătorul să stea la pândă, întrebându-se întruna dacă ultimul cuvânt nu va da cumva peste cap sensul care era cât pe ce să se precizeze. Ea să fie cea care a făcut din Ungaria cel mai mare producător de savanți şi oameni de ştiință legendari din prima jumătate a secolului XX? Patria lui Erdös, von Neumann, Fejér, Riesz, Teller, Wigner, Szilard, Lax, Pólya şi toți ceilalți…

— Evreii au jucat un rol vital! insistă Gábor, țara noastră a fost, la un moment dat, cea mai puțin antisemită din partea

asta a globului, intelectualii evrei au dat fuga aici şi au contribuit decisiv la zestrea intelectuală a ţării. Apoi s-a schimbat vântul, n-au mai fost bine-veniţi, aşa c-au plecat, din păcate…

Gábor e descoperitorul Gömböc-ului, forma aceasta incredibilă în existenţa căreia credea Vladimir Arnold; formă plină şi omogenă care are doar un singur echilibru stabil şi doar unul instabil. O formă superstabilă minimală care revine întotdeauna la poziţia de repaus, indiferent cum o aşezi pe jos. Ca un Hopa-Mitică – dar acesta are greutate adăugată în partea de jos, în timp ce Gömböc-ul e omogen.

Imediat ce-am ajuns la Budapesta, am auzit vorbindu-se despre descoperirea asta şi mi-am imaginat Gömböc-ul expus în biblioteca institutului meu. Dar, înainte de orice, am vrut să-l văd, să mă conving că există cu adevărat! A fost de-ajuns un schimb de mailuri. Institutul meu va fi foarte onorat să expună minunata dumneavoastră descoperire. Voi fi foarte onorat dacă descoperirea mea va îmbogăţi colecţia prestigiosului dumneavoastră institut; voi veni mâine la expunerea dumneavoastră, vă invit poimâine la noi, pentru prânz. Aşa să fie, abia aştept să vă întâlnesc.

— Ce expunere frumoasă ai făcut ieri, la universitate, îmi tot spune Gábor în culmea surescitării. What a talk! *What a beautiful talk!* Ce frumos era, parc-ar fi fost şi Boltzmann în sală. Printre noi! Ce expunere frumoasă!

O ia martor pe Claire:

— Sala era supraîncălzită, prea mică pentru tot publicul, proiectorul nu mai venea, soţul tău trebuia să sară peste firele care zăceau pe jos, tabla cobora singură, dar lui nici nu-i păsa! O oră şi jumătate de conferinţă! Ce bucurie!

Ciocnim pentru Boltzmann, pentru fraternitatea matematicienilor din toate ţările, pentru articolul meu despre amortizarea Landau, care, după câteva schimburi de mesaje cu referenţii, a fost, ieri, definitiv acceptat de *Acta Mathematica*.

Tokayul licoros alunecă pe gâtlej, Gábor vorbeşte-nainte. Vorbeşte despre călătoria lui la Congresul Internaţional de

Matematici Aplicate de la Hamburg, din 1995. Se organizase un prânz plătit, cu participarea lui Arnold, aşa că n-a ezitat, s-a înscris; investise în asta jumătate din bugetul lui sărăcăcios. Iar apoi, intimidat, nici măcar nu îndrăznise să intre în vorbă cu marele om!

Dar, în ziua următoare, Gábor a nimerit întâmplător peste eroul său, care se lupta cu un tip enervant (v-am rezolvat deja problema, acum zece ani, nu, n-am timp să ascult demonstrația), şi Arnold prinsese ocazia ca să scape din capcană (nu, credeți-mă, îmi pare foarte rău, am întâlnire cu domnul aici de față).

Arnold voise să afle mai multe despre acest ciudat conviv taciturn. „Te-am văzut ieri la prânz, ştiu că vii din Ungaria şi prețul mesei a fost mare pentru tine, aşa că, dacă vrei să-mi spui ceva, acum e momentul!“

Gábor i-a vorbit despre cercetările lui, iar Arnold i-a spus că nu sunt în direcția cea bună. În timpul discuției care s-a legat, Arnold i-a mărturisit credința lui în existența unei Forme Stabile Minimale, forma aceea care n-ar avea decât două echilibre, unul dintre ele stabil.

Aceste câteva minute i-au schimbat lui Gábor destinul: doisprezece ani la rând a urmărit forma aceea faimoasă. Gábor a adunat mii de pietricele până să se convingă că forma aceea nu există în natură şi că trebuie creată de la zero, poate o sferă deformată, un sferoid – pentru că sferoizii sunt rari în natură.

În fine, în 2007 a găsit-o, cu ajutorul lui Peter, unul dintre studenții lui, devenit părtaş la aventură. O sferă deformată în mod subtil, artă de nivel înalt. A botezat-o Gömböc, sferoid în maghiară.

Primul Gömböc era abstract, atât de apropiat de o sferă că diferența nici nu se vedea cu ochiul liber. Dar treptat, părinții lui au reuşit să-l mai deformeze, să ajungă la un fel de încrucişare între o minge de tenis şi o piatră tăiată de un om preistoric, dar având, în continuare, aceeaşi proprietate, numai o poziție de echilibru stabil şi o poziție de echilibru instabil!



Gábor îmi întinde un Gömböc enorm, din plexiglas:

— Nu-i aşa că-i frumos? Doisprezece ani de căutări! Când îl văd, chinezii cred că e o reprezentare în relief a lui Yin şi Yang! Primul i-a fost oferit lui Arnold. O să le spun să-ți trimită un exemplar frumos, din metal, numerotat 1928, ca data de naştere a institutului tău!

Încă o înghițitură de tokay. Copiii fotografiază fotografiile care defilează pe ecranul uriaş; soția lui Gábor, fotograf amator de talent, fotografiază copiii. Gábor continuă să vorbească şi-i ascult fascinat povestea. O poveste fără sfârşit, o poveste despre matematică, despre căutări, despre pasiune şi vise.

Anexă
Traduceri

p. 32: Extras din nuvela „Pasărea Soare“, de Neil Gaiman.

— Spune drept, Crawcrustle, zise Jackie Newhouse înfierbântată, de cât timp mănânci Phoenixul?

— Puțin peste zece mii de ani, spuse Zebediah. Plus-minus câteva mii. Nu-i greu, dac-ai prins şmecheria; să prinzi şmecheria, asta-i partea grea. Dar Phoenixul ăsta e cel mai bun pe care l-am gătit vreodată. Sau poate-ar trebui să spun: „Niciodată n-am gătit atât de bine Phoenixul ăsta“?

— Anii! zise Virginia Boote, vi-i arde focul!

— Chiar aşa, admise Zebediah. Oricum, trebuie să te obişnuieşti cu căldura înainte să mănânci pasărea. Altfel, rişti să arzi de tot.

— Oare de ce nu mi-am amintit chestia asta? se întrebă Augustus DouăPene McCoy, printre flăcările vii care-l înconjurau. De ce nu mi-am amintit că aşa s-a prăpădit tata şi, înaintea lui, taică-su, că amândoi s-au dus la Heliopolis ca să mănânce Phoenixul? De ce mi-aduc aminte abia acum?

— O să ardem până n-o să mai rămână nimic din noi? întrebă Virginia, incandescentă. Sau o să ardem numai până-n copilărie, apoi până la stadiul de fantome şi de îngeri, şi-apoi o să schimbăm din nou sensul de mers? N-are-a face. Oh, Crusty, e-aşa de nostim!

(Extras din „L'Oiseau-Soleil“, de Neil Gaiman, în *Des choses fragiles*, éd. Diable-Vauvert, 2009; trad. Michel Pagel.)

p. 74: DNE, grupul rock de la IAS

Ce iese când aduni 200 din cei mai serioşi savanți ai lumii şi-i izolezi într-o clădire din lemn, îi eliberezi de orice fel de preocupări lumeşti ale vieții universitare şi le spui să facă exact ce ştiu ei mai bine? Nu mare lucru. E drept, se face multă cercetare de vârf la faimosul Institute for Advanced Studies (Institutul de Studii Avansate) de la Princeton. Mulțumită remarcabilei ospitalități a institutului, nu există loc mai bun în care un universitar să stea şi să reflecteze. Şi totuşi, după spusele multor invitați, problema e că singurul lucru care se poate face la institut e să stai şi să reflectezi. Ar fi un eufemism să numeşti IAS un turn de fildeş, pentru că nu există nici un loc mai înălțat. Cele mai multe instituții universitare de clasă mondială, chiar şi cele mai serioase, dispun de un loc unde un şoarece de bibliotecă pradă lenii poate bea o halbă de bere şi poate asculta un tonomat. Nu şi IAS. Bătrânii evocă zilele lipsite de griji din anii ’40 şi ’50, când institutul era punctul de întâlnire al elitei intelectuale de la Princeton. John von Neumann a inventat informatica modernă, dar se spune şi că a născocit o mulțime de cocktailuri îmbătătoare, pe care le-a distribuit cu generozitate în timpul unor petreceri fioroase. Einstein a dat peste cap fizica, dar, la ocazii, ştia să treacă şi la scripcă. După modelul anticilor, patriarhii institutului păreau să creadă că oamenii trebuie să fie întregi, cum ar fi spus ei, implicați în activități de toate felurile, dintre cele simple, ca şi dintre cele elevate, potrivit proporției de aur. Dar acum, apolinicul a copleşit în asemenea măsură dionisiacul la institut, încât, după părerea multor membri, până şi ideea de a te distra e considerată numai în termeni abstracți. Plimbându-te prin institut, poți întâlni laureați Nobel sau medaliați Fields. Dat fiind sprijinul generos al institutului, şi tu ai putea deveni unul dintre ei. Dar poți fi aproape sigur că nu vei bea un pahar, şi nici nu vei sta de bancuri cu vreunul dintre ei.

p. 187: Invitația la un colocviu la Fields Institute

Date: Tue, 22 Sep 2009 16:10:51 -0400 (EDT)
From: Robert McCann <mccann@math.toronto.edu>
To: Cedric Villani <Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr>
Subject: Fields 2010

Draga Cedric,

Toamna viitoare particip la organizarea unui workshop de „Probabilitati geometice si transport optimal", intre 1-5 noiembrie, parte a Semestrului tematic Fields de „Analiza geometrica asimptotica".

Vei fi cu siguranta invitat la workshop, cu toate cheltuielile acoperite, si sper ca vei avea posibilitatea sa vii.

Totusi, voiam sa verific si daca nu cumva ai fi interesat sa vizitezi Toronto si Fields Institute pentru o perioada mai lunga, caz in care vom incerca sa facem proiectul asta atragator.

Astept vesti,

Robert

p. 195: Extras din note de curs

Cum $\gamma = 1$ este cazul cel mai interesant, e tentant să credem că ne lovim de o dificultate profundă. Dar e doar o capcană: o estimare mult mai precisă se poate obține *separând modurile* şi estimându-le pe rând, mai degrabă decât căutând o estimare pe norma întreagă. Anume, dacă punem

$$\varphi_k(t) = e^{2\pi(\lambda t+\mu)|k|}\,|\widehat{\rho}(t,k)|,$$

atunci avem un sistem de forma

$$\varphi_k(t) \leq a_k(t) + \frac{c\,t}{(k+1)^{\gamma+1}}\,\varphi_{k+1}\left(\frac{kt}{k+1}\right) \qquad (7.15)$$

Să presupunem că $a_k(t) = O(e^{-ak}\,e^{-2\pi\lambda|k|t})$. Mai întâi, simplificăm dependența de timp punând

$$A_k(t) = a_k(t)\,e^{2\pi\lambda|k|t}, \qquad \Phi_k(t) = \varphi_k(t)\,e^{2\pi\lambda|k|t}.$$

Astfel, (7.15) devine

$$\Phi_k(t) \leq A_k(t) + \frac{c\,t}{(k+1)^{\gamma+1}}\,\Phi_{k+1}\left(\frac{kt}{k+1}\right). \quad (7.16)$$

(Exponențiala din ultimul termen e corectă pentru că $(k+1)(kt/(k+1)) = kt$.) Acum, dacă obținem o estimare subexponențială pentru $\Phi_k(t)$, aceasta va implica o descreştere exponențială pentru $\varphi_k(t)$.

Iarăşi, căutăm o serie de puteri, presupunând că A_k e constant în timp, descrescând la fel ca e^{-ak} atunci când $k\to\infty$; astfel, facem ansatz-ul $\Phi_k(t)=\Sigma_m a_{k,m} t^m$ cu $a_{k,0}= e^{-ak}$. Ca exercițiu, cititorul poate face calculele pentru estimarea dublu recurentă pentru coeficientul $a_{k,m}$ şi poate deduce

$$a_{k,m} \leq \text{const.}\,A\,(k\,e^{-ak})\,k^m\,c^m\,\frac{e^{-am}}{(m!)^{\gamma+2}}$$

de unde

$$\Phi_k(t) \leq \text{const.}\, A\, e^{(1-\alpha)(ckt)^\alpha} \qquad \forall \alpha < \frac{1}{\gamma + 2} \qquad (7.17)$$

Aceasta e subexponențială chiar şi pentru $\gamma = 1$: de fapt, am folosit faptul că, *asimptotic, ecourile la valori diferite ale lui k sunt separate destul de bine în timp*.

Ca o concluzie, ca efect al singularității interacției, *ne aşteptăm să pierdem o exponențială fracționară pe rata de convergență:* dacă modul *k* al sursei descreşte ca $e^{-2\pi\lambda|k|t}$ atunci φ_k, modul *k* al soluției ar trebui să descrească la fel ca
φ_k
$e^{-2\pi\lambda|k|t}\, e^{(c|k|t)^\alpha}$. Mai general, dacă modul *k* descreşte ca *A*(*kt*), ne aşteptăm ca $\varphi_k(t)$ să descrească la fel ca $A(kt)\, e^{(c|k|t)^\alpha}$. În acest caz, putem trage aceeaşi concluzie ca mai sus , absorbind exponențiala fracționară într-o exponențială foarte lentă, cu prețul unei constante *foarte mari*, de pildă

$$e^{t^\alpha} \leq \exp\bigl(c\, \varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\bigr)\, e^{\varepsilon\, t}.$$

p. 199: Extras din expunerea mea de la Brown University

<u>Coulomb/Newton (cazul cel mai interesant)</u>

În demonstrație, interacția Coulomb/Newton şi regularitatea analitică sunt, **ambele**, critice; dar asta continuă să funcționeze şi la *timpi exponențial de mari* „pentru că“

- descreşterea liniară aşteptată e exponențială
- creşterea neliniară aşteptată e exponențială
- schema Newton converge biexponențial

Cu toate acestea, pare posibil să reuşim mai bine exploatând faptul că *ecourile la frecvențe spațiale diferite sunt destul de bine separate asimptotic.*

p. 201: Scrisoarea de resubmitere

Paris, 6 decembrie 2009

Cédric Villani
École Normale Supérieure de Lyon
& Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F-75005 Paris, FRANCE
cvillani@umpa.ens-lyon.fr

To Johannes Sjöstrand
Editor of Acta Mathematica
IMB, Université de Bourgogne
9, Av. A. Savarey, BP 47870
F-21078 Dijon, FRANCE

Resubmitere la *Acta Mathematica*

Dragă Domnule Profesor Sjöstrand,

În urma scrisorii dumneavoastră din 23 octombrie, suntem bucuroşi să submitem o nouă versiune a manuscrisului nostru, Amortizarea Landau, *pentru eventuala publicare în* Acta Mathematica.

Am analizat rezervele exprimate de unii dintre experţi în rapoartele preliminare asupra primei noastre submiteri. Credem că am ţinut seama de toate aceste rezerve în versiunea actuală, îmbunătăţită în mod esenţial.

În primul rând, şi poate asta e cel mai important, rezultatul principal acoperă acum potenţialele lui Coulomb şi Newton; în cadru analitic, aceasta era singura zonă de umbră care mai exista în analiza noastră.

Analiticitatea e o ipoteză clasică în studiul amortizării Landau, în matematică şi fizică deopotrivă; e indispensabilă convergenţei exponenţiale. Este totuşi foarte rigidă, şi unul dintre experţi s-a plâns că rezultatele noastre nu se puteau dispensa de analiticitate. Nu mai e cazul în noua versiune, deoarece suntem acum în măsură să includem unele clase de date Gevrey.

Scriam în prima versiune: „afirmăm că, afară de cazul în care se identifică un nou factor de stabilitate, nu există nici un motiv pentru a crede în amortizarea Landau neliniară pentru, să spunem, interacţia gravitaţională, într-o clasă de regularitate inferioară celei analitice“. De atunci, am identificat tocmai un asemenea factor (ecourile care se produc la frecvenţe diferite sunt bine separate asimptotic). Exploatarea sa a condus la îmbunătăţirile mai sus menţionate.

Ca un corolar, lucrarea noastră include acum noi rezultate de stabilitate pentru echilibre omogene ale ecuaţiei Vlasov-Poisson, ca stabilitatea anumitor funcţii de distribuţie nemonotone în cazul repulsiv (problemă deschisă de multă vreme) şi stabilitatea sub lungimea Jeans în cazul atractiv.

O altă rezervă exprimată de un expert se referea la faptul că folosim spaţii funcţionale neconvenţionale. Poate fi cazul pentru „norma de lucru“, dar nu pentru norma naivă prezentă în ipoteze şi în concluzii, folosită deja de alţi cercetători. Trecerea de la o normă la alta se face prin intermediul Teoremei 4.20.

Articolul a fost rescris în întregime pentru a încorpora aceste îmbunătăţiri şi a fost verificat cu atenţie. Ca să evităm o nouă creştere în lungime, am suprimat toate dezvoltările şi comentariile care nu erau strict legate de rezultatul nostru principal; majoritatea remarcilor care au rămas sunt destinate numai explicării rezultatelor şi metodelor.

Un comentariu final despre lungimea lucrării noastre: suntem pregătiţi să discutăm eventuale ajustări în organizarea

articolului şi facem observaţia că prezentarea modulară a metodelor folosite în manuscris deschide poarta unei munci în echipă a experţilor însărcinaţi cu verificarea, ceea ce ar trebui să le uşureze sarcina.

Sperăm cu toată tăria că articolul îi va satisface pe experţi şi rămânem

Ai dumneavoastră,

Clément Mouhot & Cédric Villani

p. 230: Tigrii lui Frisch

Fenomenul Tygre pentru ecuațiile lui Burgers şi Euler trunchiate (1h) de Uriel Frisch

Arătăm că soluțiile ecuațiilor hidrodinamice incompresibile, după suprimarea tuturor modurilor Fourier spațiale cu frecvențe mai mari decât un prag k_g, prezintă proprietăți neaşteptate. Studiul este întreprins atât pentru ecuația Burgers unu-dimensională cât şi pentru ecuația lui Euler incompresibilă doi-dimensională. La un k_g mare, pentru condiții inițiale netede, primul simptom de trunchiere, o oscilație localizată cu lungime de undă scurtă, pe care o numim „tigru“, e provocat de o interacție rezonantă între mişcarea particulelor fluide şi undele de trunchiere generate de caracteristicile la scară mică (şocuri, straturi limită cu gradienți de vorticitate puternici etc.). Aceşti tigri apar atunci când singularitățile din planul complex se apropie de dreapta reală la mai puțin de o lungime de undă Galerkin $\lambda_g=2\pi/ k_g$ şi, în mod tipic, apar departe de structurile la scară mică preexistente în pozițiile unde vitezele se potrivesc cu cele ale respectivelor structuri. Tigrii sunt slabi şi, la început, puternic localizați – în cazul Burgers la timpul apariției primului şoc, amplitudinile şi lărgimile lor sunt proporționale cu $k_g^{-2/3}$ şi respectiv $k_g^{-1/3}$ – dar cresc şi, în final, invadează întregul flux. Sunt aşadar primele manifestări ale termalizării prezise de T.D. Lee în 1952. Brusca anomalie disipativă – prezența unei disipări finite în limita vâscozității care dispare după un timp finit – binecunoscută pentru ecuația Burgers şi, uneori, conjecturată pentru ecuația lui Euler 3D, are un corespondent în cazul trunchiat: capacitatea tigrilor de a stoca o cantitate finită de energie în limita $k_g\to\infty$. Aceasta duce la constrângeri Reynolds care acționează la scări mai mari decât lungimea de undă Galerkin, şi astfel împiedică fluxul să conveargă la soluția limită nevâscoasă. Există indicii potrivit cărora ar fi posibil să eliminăm tigrii, iar astfel să regăsim comportarea corectă în limita nevâscoasă.

p. 232: „Tigrul“ lui William Blake

*Chiar dacă acest poem celebru e, în mod esențial, intraductibil, se găsesc cu uşurință numeroase încercări de traducere în franceză, pe hârtie sau în formă electronică; nici una nu mi s-a părut satisfăcătoare, şi nu pot decât să încurajez cititorul să încerce să aprecieze versiunea originală. Sunt disponibile şi numeroase exegeze, precum şi mai multe variante care diferă de o manieră subtilă, diferențe datorate ezitărilor autorului şi editorilor săi. Am redat aici textul original şi (aşa cum Blake o făcuse deja într-unul dintre manuscrise) am suprimat punctuația – care suferă ea însăşi importante variații de la o ediție la alta**:

Tigru, Tigru, arzând grozav
În codrul nopții suav,
Ce mâini, ce ochi din vecie
Îți scriu cumplita simetrie?

Din ce bolți sau joase văi
Vin flăcări în ochii tăi?
Ce aripi cutează locul
Şi ce mâini s-atingă focul?

Cine, cum ştiu-nnoda
Fibrele-n inima ta?
Iar când a-nceput a bate
Ce brațe, ce glezne-ncordate?

Ce ciocan, ce lanț ți-a scos
Creierul din jarul gros?

---

* În română, iată o versiune a lui Şt. Augustin Doinaş (în *Atlas de sunete fundamntale*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1988)

Ce pumn pe ce nicovală
Izbind teroarea mortală?

Când aştrii-şi frâng lancea-n zbor
Spălând ceru-n plânsul lor,
Îşi atinge-n tine țelul,
Zâmbind, cel ce-a făcut Mielul?

Tigru, Tigru, arzând grozav
În codrul nopții suav
Ce mâini, ce ochi de vecie
Îți scriu cumplita simetrie?

Anexă
Versuri originale

p. 137: Marinarul şi roza.

Le marin et la rose (Huard)

Y'avait un' fois une rose
Une rose et un marin
L'marin était à Formose
La rose était à Dublin

Jamais au monde ils n'se virent
Ils étaient beaucoup trop loin
Lui quittait pas son navire
Ell' quittait pas son jardin

Au-d'ssus de la rose sage
Des oiseaux passaient tout l'temps
Et puis aussi des nuages
Des soleils et des printemps

Au-d'ssus du marin volage
Des rêv's étaient tout pareils
Aux printemps et aux nuages
Aux oiseaux et aux soleils

L'marin périt en septembre
Et la ros', le même jour
Vient se flétrir dans la chambre
D'une fille en mal d'amour

Personn’ jamais ne suppose
Qu’il y ait le moindre lien
Entre l’marin de la Formose
Et la rose de Dublin

Et seul un doigt sur la bouche
Un ang’ beau comme un éclair
Jett’ quand le soleil se couche
Des pétales sur la mer.

p. 160: Zi de sărbătoare.

Jour de Fête (Catherine Ribeiro)

Le grand jour était arrivé
De partout la fête éclatait
Derrière chaque fenêtre luisaient
Guirlandes bougies et boules de gomme
Ce soir-là chacun se devait
De s’éclater au tiroir-caisse
Des magasins pochettes surprises
Jour du formidable gâchis -

Paris scintillait de lumières
Mais tout mon être était absent
J’avais croisé un satellite
Bien mal placé sur mon orbite
Qu’est-ce que j’foutais sur les trottoirs
Dans les boutiques endimanchées
À chercher l’objet pseudo rare
À chercher le dernier cadeau -

J'aurais voulu être ailleurs
Cet ailleurs n'avait pas de lieu
Je n'avais plus ni faim ni soif
J'avais envie de faire l'amour
N'importe où - n'importe comment
Pourvu que ce soit de l'amour
Même de l'amour au ras du sol
Pourvu que passe l'émotion -

Le téléphone n'a pas sonné
Sûrement à cause des PTT
Le champagne n'avait aucun goût
Je veillais pour être debout
Le temps passait à fendre l'âme
Et la pluie frappait les carreaux
Il n'y a rien de plus dérisoire
Qu'un corps chaud dans un lit désert -

Ce soir-là combien de malades
S'évertuèrent à faire l'amour
Dans des draps d'aube macabre
L'haleine empuantie d'alcool
Cétait le Grand Jour - Jour de Paix
Au fin fond de mes Amériques
Je rêvais de mon satellite
Bien mal placé sur mon orbite -

p. 160: Turnul din Babel.

La Tour de Babel (extrait), Guy Béart

Pour un mot qui clame
Un mot de travers
Il y aura des flammes
Dans tout l'univers
Les bouches sont grandes
Pour les beaux discours
Mais les peaux se vendent
Les peaux de tambours

Un jour nos langages
Parleront de fleurs
Et du mariage
Des quatre couleurs
Sauras-tu comprendre
Qu'ils parlent d'amour
Moi je vais t'attendre
Au pied de la Tour

En attendant, Caïn chasse toujours Abel
Mais j'ai construit de mes mains la Tour de Babel

